

Bild 12. Konstruktion von Nabe und Gegengewichten

zeitig eine Prüfung der mechanischen Ausrüstung und Versuche an dem Servosteuersystem durchgeführt wurden. Anschließend wurden die verschiffung wurden die Schrauben einfach herausgezogen, die Klötze aber verblieben, so daß sie für die Wiederzusammensetzung an der Baustelle dienen konnten. (Fortsetzung folgt)

Schriftum

- [1] Bowen, E. G.: Problems involved in the design of a giant radio telescope. Australasian Eng. 45 (1960).
- [2] Bowen, E. G. und Minnett, H. C.: The Australian 210 ft radio telescope. Proc. I.R.E. 51 (1963), H. 2, S. 98–105 (Australia).
- [3] Jeffery, M. H.: Construction and operation of the 210 ft radio telescope at Parkes, Australia. Annals of the New York Academy of Sciences 116 (1964), Art. 1.
- [4] Kälweit, C.: Die Askania-Steuerungsanlage für das australische 210 ft Radioteleskop. Askania-Warte 59 (1962), H. 2, S. 1–7 (herausgegeben von den Askania-Werken, Berlin).
- [5] Kerr, F. J.: Australia's 210 ft. radio telescope. Sky & Telescope 18 (1959), H. 12, S. 666–668.
- [6] Kühne, C.: Steering system of the 210 ft radio telescope. Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften. 2. Abhandlungen 1962/63, S. 31–39.
- [7] Minnett, H. C.: The Australian 210 ft. radio telescope. Sky & Telescope 24 (1962), H. 4, S. 184–189.
- [8] Mucha, A.: Die Berechnung von Antennenspiegeln und das Verfahren von Shu-Tien Li. Der Stahlbau 34 (1965), H. 8, S. 246.
- [9] Rothwell, J.: The control of a radio telescope. Assoc. Electr. Ind. Eng. 3 (1963), H. 1, S. 15–21.
- [10] Wallis, B.: Improvements in telescope mountings. British Patent Application No. 29 248/1955.
- [11] Wheeler, R. G.: Design Study of Control System for 210 ft. Radio Telescope. Automatic and Remote Control. Proc. I.F.A.C., 2nd Congress 1963, S. 519–528.
- [12] Wyatt, T. A.: The aerodynamics of shallow paraboloid Antennas. Annals of the New York Academy of Sciences 116 (1964), Art. 1.

Der innere Teil der Reflektoroberfläche wurde in 12 Segmenten aus 10 mm dickem unausgesteiftem Blech hergestellt, getragen von

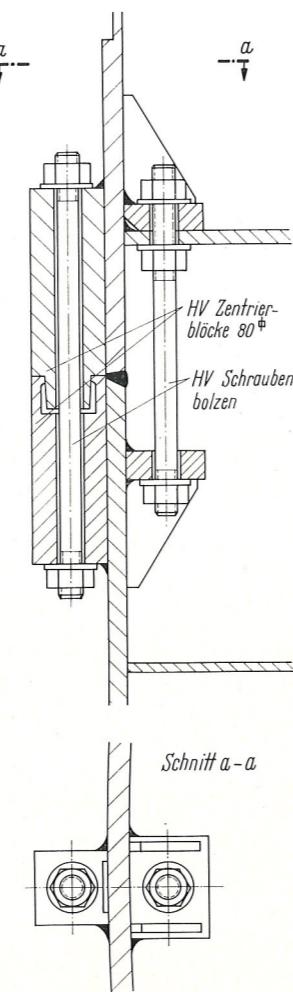


Bild 13. Einzelheit der Flanschverbindungen der Gegengewichte (Schnitt d-d des Bildes 12)

Bolzen, die in die obere Querscheibe geschraubt sind. Nach der Justierung wurden die Segmente zu einer kontinuierlichen Platte verschweißt.

6.4. Gegengewichte

Die Gegengewichtskonstruktionen haben eine doppelte Aufgabe: Erstens den Gegengewichtsballast (über 400 t aus Beton, vermischt mit Stahlkörnern) und zweitens die Zahnstangen von 8,2 m Radius für den Altitudenantrieb zu tragen. Die letzte Funktion bestimmte die Form des unteren Teils und forderte dessen genaueste Herstellung und Montage. Jedes Gegengewicht besteht aus drei geschweißten Kästen. Der untere ist gekrümmt und bearbeitet, um die Zahnstange zu tragen. Zwischen den zwei unteren Abschnitten wurde eine bearbeitete Flanschverbindung vorgenommen, um die Ausrichtung der Zahnstange zu erleichtern. Spannschrauben dienen zur Spannungsübertragung und Paßschrauben gewährleisten genaue Lage. Wegen der erforderlichen schweren Flanschlaschen in den Gegengewichtskästen entschied man sich für die Baustellenschweißung. Diese Nähte wurden so ausgeführt, daß eine möglichst geringe Schweißverwerfung auftrat. Eine Versuchsverbindung in voller Größe wurde deshalb in den Werkstätten hergestellt, und während dieser Versuche wurden die Verbindungsmerkmale und die Anordnungen festgelegt, wie in Bild 13 dargestellt. Die beiden Zentrierblöcke wurden zuerst fest zusammengeschraubt. Sie wurden dann quer über die genau ausgerichtete Verbindung gelegt und je ein Klotz an jeder Seite verschweißt. Beim Demontieren der Konstruktion für die Verschiffung wurden die Schrauben einfach herausgezogen, die Klötze aber verblieben, so daß sie für die Wiederzusammensetzung an der Baustelle dienen konnten.

an jeder Seite verschweißt. Beim Demontieren der Konstruktion für die Verschiffung wurden die Schrauben einfach herausgezogen, die Klötze aber verblieben, so daß sie für die Wiederzusammensetzung an der Baustelle dienen konnten. (Fortsetzung folgt)

Die Nabe besitzt zwei Hauptlängsschotter in einem Abstand von 3,55 m, die mit den inneren Flächen der Kastenkonstruktion der Gegengewichte, die aus dem Boden der Nabe herausragen, verbunden sind. Die äußeren Flächen der 1,08 m breiten Gegengewichtskästen stellen gleichzeitig die inneren Lagerbleche für die Altitudelager dar. Die äußeren Lagerbleche werden durch eine Vergrößerung des unteren Ringes gebildet. Es wurde als wünschenswert erachtet, die zwei Lager in einer einzigen Fabrikationseinheit herzustellen. Deshalb wurde der untere Teil der Nabe, der durch die beiden unteren Querscheiben abgeschlossen wird, in drei kleinere Teile zerspalten, und zwar in ein zentrales Kastenglied, das die Altitudelager aufnimmt und zwei Segmentteile. Der obere Ring und die zugehörige Querscheibe wurden zum Zwecke der Verschiffung in zwei Hälften hergestellt. Die Bleche der Zylindernabe des oberen Teiles wurden in Bleche von 1,85 m Breite aufgeteilt und mit Laschen versehen. Die Laschen der Ringe besitzen bearbeitete stumpf gestoßene Flanschverbindungen mit Schrauben in Längsrichtung, um die Verbindung vorzuspannen. Alle anderen Verbindungen wurden mit 24 Paßschrauben mit einem Mittenabstand von 230 mm hergestellt. Das reicht aus, die volle Festigkeit der Verbindung herzustellen und sichert gleichzeitig, daß die Nabe an der Baustelle genau wieder zusammengesetzt werden kann. Die Verbindungen im Felde wurden schließlich zusätzlich verschweißt, um weitere Steifigkeit und Wasserdichtigkeit zu erzielen.

Der innere Teil der Reflektoroberfläche wurde in 12 Segmenten aus 10 mm dickem unausgesteiftem Blech hergestellt, getragen von

Theorie der Wölbkrafttorsion unter Berücksichtigung der sekundären Schubverformungen

Analogiebetrachtung zur Berechnung des querbelasteten Zugstabes

Von Prof. Dr.-Ing. K. Roik und Dipl.-Ing. G. Sedlacek

1. Einleitung

Auf die Analogie zwischen der Berechnung des querbelasteten Zugstabes und des verdrehungsbeanspruchten Stabes mit nicht wölbefreiem Querschnitt ist im Schrifttum wiederholt hingewiesen worden [1], [2], [3]. Hierbei entsprechen sich jeweils der über die Stablänge konstante Horizontalzug H und die St. Venantsche Torsionssteifigkeit $G_J D$ sowie die Biegesteifigkeit $E J$ und die Wölbsteifigkeit E_{Fw} .

Bisher wurden die beiden Theorien nur unter Berücksichtigung der Biegeverformung und der Verformung infolge der primären (St. Venantschen) Schubspannungen verglichen. In diesem Beitrag soll gezeigt werden, daß die Analogie auch besteht, wenn die Verformungen infolge der Querkraftschubspannungen und der sekundären (Wölb-) Schubspannungen berücksichtigt werden. Der Vergleich beider Berechnungen erscheint sehr geeignet, die erweiterte Theorie der Wölbkrafttorsion — unter Berücksichtigung der sekundären Schubverformungen — wesentlich anschaulicher zu machen.

Bei Berücksichtigung der Querkraftverformung beim Biegebalken mit Axialzug sind die Durchbiegungen $\bar{\eta}$ größer als nach der üblichen Theorie. Mithin wird die Entlastung durch den Anteil $H \cdot \bar{\eta}$ größer, die Biegemomente im Träger werden also kleiner. Bei durchlaufenden Stäben werden außerdem die Stützmomente kleiner, da infolge des Querkraftsprunges an den Stützen ein Knick in der Biegelinie über den Auflagern entsteht. Dadurch sind die wirklichen Klapffungen δ_i am statisch bestimmten Hauptsystem unter einem kleineren Moment $X = M_{vst}$ geschlossen als bei der Berechnung ohne Schubverformung mit der Kontinuitätsbedingung $\eta'_{links} = \eta'_{rechts}$ an den Auflagern (Bild 1 und Bild 4).

Analoge Überlegungen lassen sich auch für den Torsionsstab durchführen. Der statisch bestimmt, also an den Auflagern wölbunbehindert gelagerte Torsionsstab (Gabellagerung) (Bild 2) erfordert bei der Berechnung nach der erweiterten Theorie sinngemäß größere Verdrehungen und damit größere Verdrillungen als bei Berechnung nach der „klassischen“ Theorie. Der Anteil des durch St. Venantsche Torsion abgetragenen primären Torsionsmomentes $G_J D \cdot \bar{\varphi}$ am äußeren Verdrehmoment wird also größer, das sekundäre Torsionsmoment und damit die Wölbnormalspannungen werden kleiner.

Bei durchlaufenden Torsionsstäben oder Wölbbehinderung an den Stabenden werden zweckmäßigerweise ähnlich den (statisch unbestimmt) Stützmomenten beim Biegestab mit Axialzug die Wölbmomente (Wölbverdrehmomentenintegrale) M_{wst} an den Auflagern als statisch Überzählige angesetzt (Bild 3). Auch diese nehmen nach der erweiterten Theorie einen kleineren Wert an, da infolge der Verformungen durch die sekundären Schubspannungen der Verlauf der Verdrillung $\bar{\varphi}$ an den Stützen einen Knick hat. Daher liefert die Kontinuitätsbedingung der „klassischen“ Theorie $\eta'_{links} = \eta'_{rechts}$ an den Auflagern oder $\varphi' = 0$ wölbbehinderter Einspannung größere Wölbmomente als die Übergangsbedingung der erweiterten Theorie.

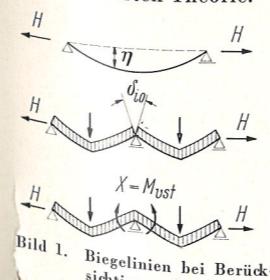


Bild 1. Biegelinien bei Berücksichtigung der Querkraftverformungen

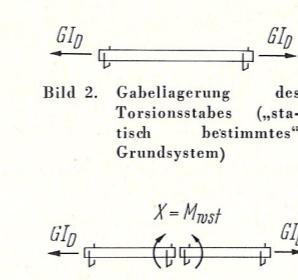


Bild 2. Gabellagerung des Torsionsstabes („statisch bestimmtes“ Grundsystem)

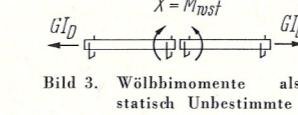


Bild 3. Wölbmomente als statisch Unbestimmte

Eine Abschätzung des Schubverformungseinflusses beim Biegestab mit Axialzug entsprechend der Modellvorstellung für die Hängebrücke nach K. H. Lie findet sich in [4]. Ein Berechnungsverfahren unter Berücksichtigung der Verformungen aus den sekundären Schubspannungen für nicht wölbefreie Torsionsstäbe hat R. Heilig angegeben [5], [6]. In diesem Beitrag wird gezeigt, daß sich die Ergebnisse der erweiterten Theorie bequem aus den Ergebnissen der klassischen Theorie herleiten lassen. Den Betrachtungen wird die Bezeichnungsweise von F. W. Börnscheuer [1], [2] und die Berechnung von Hängebrücken nach K. H. Lie [7] zugrunde gelegt. Zur besseren Übersichtlichkeit werden bei den parallel laufenden Ableitungen die Gleichungen der Hängebrücke mit (H...), die Gleichungen für den Torsionsstab mit (T...) numeriert.

2. Voraussetzungen und Bezeichnungen

Außer den üblichen Annahmen der technischen Elastizitätstheorie für stabförmige Balken und der Elastizitätstheorie der Wölbkrafttorsion für Stäbe mit dünnwandigen, geschlossenen oder offenen Querschnitten, deren Form sich nicht verändert, liegen den folgenden Ableitungen nachstehende Voraussetzungen zugrunde:

(H:)

a) Über den ganzen Biegequerschnitt konstant angenommener Verdrehungswinkel γ_{Qv} aus der Wirkung der Querkraftschubspannungen (Schubverzerrung).

(T:)

a) Über den ganzen Torsionsquerschnitt konstant angenommener Verdrehungswinkel γ_{MD} aus der Wirkung der sekundären Schubspannungen (Schubverzerrung).

b) Feldweise konstanter Axialzug H und konstante Biegesteifigkeit.

b) Feldweise konstante St. Venantsche Torsionssteifigkeit und Wölbsteifigkeit.

Als Bezeichnungen gelten:

(H:)

x Koordinate in Stablängsrichtung

H Horizontalzug

E J Biegesteifigkeit

$\eta' \cdot G F S$ Schubsteifigkeit

(T:)

x Koordinate in Stablängsrichtung

G J D St. Venantsche Torsionssteifigkeit

E_{Fw} Wölbsteifigkeit

$\eta' \cdot G J D$ „sekundäre“ St. Venantsche Torsionssteifigkeit

$\eta' \varphi$ Schubzahl

μ Beiwert zur Korrektur der Biegesteifigkeit für die erweiterte Theorie

$\bar{\eta}$ Durchbiegung nach der erweiterten Theorie

η Durchbiegung nach der „klassischen“ Theorie

$\bar{\eta}'$ Stabverdrehung nach der erweiterten Theorie

$\bar{\varphi}$ Drehwinkel nach der erweiterten Theorie

φ Drehwinkel nach der „klassischen“ Theorie

$\bar{\varphi}'$ Verdrillung nach der erweiterten Theorie

$\bar{\eta}_w$ Verdrillungsanteil aus der Wirkung der Normalspannungen (entsprechend der „klassischen“ Theorie)

(H:)
 $\bar{\eta}'_{Qv}$ Stabverdrehung aus der Wirkung der Querkraftschubspannungen \equiv Schubverzerrung γ_{Qv}

p_0 äußere Belastung

Q_0 gesamte Querkraft

Q_v Querkraft des Versteifungsträgers

M_0 gesamtes Biegemoment

M_v Biegemoment des Versteifungsträgers

β Lösungsparameter

(T:)
 $\bar{\eta}'_{MDS}$ Verdrillungsanteil aus der Wirkung der „sekundären“ Schubspannung \equiv Schubverzerrung γ_{MDS}

m_D äußere Belastung

M_D gesamtes Torsionsmoment

M_{DS} sekundäres Torsionsmoment

$\int_0^x M_D dx$ —

M_w Wölbmoment (Wölbverdrehmomentenintegral)

λ Lösungsparameter

3. Ableitung der erweiterten Differentialgleichung

Schneidet man den belasteten Biegestab mit Axialzug oder den Torsionsstab an einer beliebigen Stelle und betrachtet ein Schnittgraufer, so lautet die geometrische Bedingung für die elastische Gesamtverformung (Bild 4):

$$\bar{\eta}'_{Mv} + \gamma_{Qv} = \bar{\eta}' \quad \dots \quad (H 1) \quad \bar{\eta}'_w + \gamma_{MDS} = \bar{\varphi}' \quad \dots \quad (T 1)$$

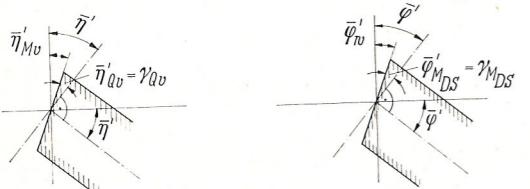


Bild 4. Gesamtverformungen am Schnittufer

Für die Verformungsanteile gelten die Elastizitätsbeziehungen:

$$\bar{\eta}''_{Mv} = -\frac{M_v}{EJ} \quad \dots \quad (H 2a) \quad \bar{\varphi}''_w = -\frac{M_w}{EF_{ww}} \quad \dots \quad (T 2a)$$

$$\gamma_{Qv} = \frac{Q_v}{\nu_\eta \cdot GF} \quad \dots \quad (H 2b) \quad \gamma_{MDS} = \frac{M_{DS}}{\nu_\varphi \cdot GJ_D} \quad \dots \quad (T 2b)$$

Der Formbeiwert $1/\nu$ wird als energetischer Mittelwert durch Vergleich der inneren Formänderungsarbeit dA_i , die die ungleichförmig verteilten Schubspannungen am Volumelement $F \cdot dx$ leisten, mit der äußeren Formänderungsarbeit dA_a berechnet.

$$\begin{aligned} dA_i &= \int_F \int_{\tau=0}^{\tau} \tau d\gamma dF dx = \\ &= \int_F \int_{\tau=0}^{\tau} \frac{\tau}{G} dF dx = \\ &= \frac{1}{2G} \int_F \tau^2 dF dx \quad \dots \quad (H, T 2c) \end{aligned}$$

Die äußere Formänderungsarbeit dA_a wird von der Schnittgröße Q_v oder M_{DS} mit dem über den ganzen Querschnitt konstant angenommenen Verdrehungswinkel γ_{Qv} oder dem Verdrehungswinkel γ_{MDS} geleistet.

$$\begin{aligned} dA_a &= \int_{\gamma_{Qv}=0}^{\gamma_{Qv}} Q_v \cdot d\gamma_{Qv} \cdot dx = \quad dA_a = \int_{\gamma_{MDS}=0}^{\gamma_{MDS}} M_{DS} \cdot d\gamma_{MDS} \cdot dx = \\ &= \frac{1}{2} Q_v \cdot \gamma_{Qv} \cdot dx = \quad = \frac{1}{2} M_{DS} \cdot \gamma_{MDS} \cdot dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_v^2}{\nu_\eta \cdot GF} dx \quad (H 2d) \quad = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_{DS}^2}{\nu_\varphi \cdot GJ_D} dx \quad (T 2d) \end{aligned}$$

Setzt man in Gl. (H, T 2c) für die Schubspannungen eines allgemeinen, kombiniert geschlossen-offenen Querschnitts (siehe [1]):

$$\tau_{Qv} = \frac{Q_v}{J \cdot t} \left(\oint \frac{F_y(s) \frac{ds}{t}}{\oint \frac{ds}{t}} - F_y(s) \right) \quad \dots \quad (H 2e)$$

$$\tau_{MDS} = \frac{M_{DS}}{F_{ww} \cdot t} \left(\oint \frac{F_w(s) \frac{ds}{t}}{\oint \frac{ds}{t}} - F_w(s) \right) \quad \dots \quad (T 2e)$$

so folgt mit $dA_i = dA_a$

$$\frac{1}{\nu_\eta} = \frac{F}{J^2} \int_F \left(\oint \frac{F_y(s) \frac{ds}{t}}{\oint \frac{ds}{t}} - F_y(s) \right)^2 \frac{ds}{t} \quad \dots \quad (H 2f)$$

$$\frac{1}{\nu_\varphi} = \frac{J_D}{F_{ww}^2} \int_F \left(\oint \frac{F_w(s) \frac{ds}{t}}{\oint \frac{ds}{t}} - F_w(s) \right)^2 \frac{ds}{t} \quad \dots \quad (T 2f)$$

Aus den Gl. (H, T 1), (H, T 2a), (H, T 2b) und den Gleichgewichtsaussagen

$$M_0 = H \cdot \bar{\eta} + M_v \quad (H 3a) \quad M_D = M_{DS} + GJ_D \cdot \bar{\varphi}' \quad (T 3a)$$

sowie

$$M'_v = Q_v; \quad p_0 = -Q'_0 \quad \dots \quad (H 3b)$$

$$M'_w = M_{DS}; \quad m_D = -M'_D \quad \dots \quad (T 3b)$$

folgt nach einigem Umformen:

$$\bar{\eta}'' \left(1 + \frac{H}{\nu_\eta \cdot GF} \right) - \frac{H}{EJ} \bar{\eta} = -\frac{M_0}{EJ} - \frac{p_0}{\nu_\eta \cdot GF} \quad (H 4)$$

$$\bar{\varphi}''' \left(1 + \frac{GJ_D}{\nu_\varphi \cdot GJ_D} \right) - \frac{GJ_D}{EF_{ww}} \bar{\varphi}' = -\frac{M_D}{EF_{ww}} - \frac{m'_D}{\nu_\varphi \cdot GJ_D} \quad (T 4)$$

Setzt man

$$\left(1 + \frac{H}{\nu_\eta \cdot GF} \right) = \frac{1}{\mu} \quad (H 5) \quad \left(1 + \frac{1}{\nu_\varphi} \right) = \frac{1}{z} \quad \dots \quad (T 5)$$

so erhält man die erweiterten Differentialgleichungen:

$$\bar{\eta}'' - \frac{\mu \cdot H}{EJ} \bar{\eta} = -\frac{\mu \cdot M_0}{EJ} - \frac{p_0}{H} (1 - \mu) \quad \dots \quad (H 6a)$$

$$\bar{\varphi}''' - \frac{z \cdot GJ_D}{EF_{ww}} \bar{\varphi}' = -\frac{\mu \cdot M_D}{EF_{ww}} - \frac{m'_D}{GJ_D} (1 - z) \quad \dots \quad (T 6a)$$

oder mit den Abkürzungen:

$$\bar{J} = \frac{J}{\mu} \quad \dots \quad (H 6b) \quad \bar{F}_{ww} = \frac{F_{ww}}{z} \quad \dots \quad (T 6b)$$

und

$$\bar{M}_0 = M_0 + p_0 \frac{EJ}{H \cdot \mu} (1 - \mu) \quad \dots \quad (H 6c)$$

$$\bar{M}_D = M_D + m'_D \frac{EF_{ww}}{GJ_D \cdot z} (1 - z) \quad \dots \quad (T 6c)$$

endlich:

$$\bar{\eta}'' - \frac{H}{E\bar{J}} \bar{\eta} = -\frac{\bar{M}_0}{E\bar{J}} \quad \dots \quad (H 6d)$$

$$\bar{\varphi}''' - \frac{GJ_D}{E\bar{F}_{ww}} \bar{\varphi}' = -\frac{\bar{M}_D}{E\bar{F}_{ww}} \quad \dots \quad (T 6d)$$

Wie man sieht, gelten für die erweiterte Theorie formal dieselben Differentialgleichungen wie für die „klassische“ Theorie, die den Grenzfall $\mu = 1$ oder $z = 1$ mit $\bar{J} = J$ und $\bar{M}_0 = M_0$ oder $\bar{F}_{ww} = F_{ww}$ und $\bar{M}_D = M_D$ darstellt. Deshalb werden für die erweiterte Theorie die Lösungen der „klassischen“ Theorie benutzt, da diese für alle praktisch wichtigen Lastfälle vorhanden sind [2].

4. Lösung der Differentialgleichungen

Die Lösungsansätze für die „klassische“ Theorie lauten:

$$\begin{aligned} \eta &= A_1 \cdot \sinh \beta x + A_2 \cdot \cosh \beta x + \\ &+ \frac{1}{H} \left(M_0 + \frac{d^2 M_0}{\beta^2 \cdot dx^2} + \frac{d^4 M_0}{\beta^4 \cdot dx^4} \dots \right) = \\ &= A_1 \cdot \sinh \beta x + A_2 \cdot \cosh \beta x + \frac{M_0}{H} - \frac{p_0}{H \cdot \beta^2} \quad \dots \quad (H 7a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi' &= B_1 \cdot \sinh \lambda x + B_2 \cdot \cosh \lambda x + \\ &+ \frac{1}{GJ_D} \left(M_D + \frac{d^2 M_D}{\lambda^2 \cdot dx^2} + \frac{d^4 M_D}{\lambda^4 \cdot dx^4} \dots \right) = \\ &= B_1 \cdot \sinh \lambda x + B_2 \cdot \cosh \lambda x + \frac{M_D}{GJ_D} - \frac{m'_D}{GJ_D \cdot \lambda^2} \end{aligned}$$

oder

$$\varphi = C_1 \cdot \sinh \lambda x + C_2 \cdot \cosh \lambda x + \frac{m_D}{GJ_D} - \frac{m_D}{GJ_D \cdot \lambda^2} \quad (T 7a)$$

Hierbei ist

$$\beta^2 = \frac{H}{EJ} \quad \text{und} \quad \lambda^2 = \frac{GJ_D}{EF_{ww}}.$$

Da bei den üblichen technischen Lastfällen die äußere Belastung p_0 oder m_D höchstens linear über die Stablänge veränderlich ist, wird die Reihe nach dem 2. Glied abgebrochen:

$$\frac{d^4 M_0}{d x^4} = -\frac{d^2 p_0}{d x^2} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d^4 M_D}{d x^4} = 0.$$

Für die erweiterte Theorie unterscheiden sich die Lösungen nur durch die veränderten Werte \bar{J} und \bar{M}_0 oder \bar{F}_{ww} und \bar{M}_D :

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= \bar{A}_1 \cdot \sinh \bar{\beta} x + \bar{A}_2 \cdot \cosh \bar{\beta} x + \frac{1}{H} \left(\bar{M}_0 + \frac{d^2 \bar{M}_0}{\bar{\beta}^2 \cdot dx^2} \right) \\ &= \bar{A}_1 \cdot \sinh \bar{\beta} x + \bar{A}_2 \cdot \cosh \bar{\beta} x + \frac{M_0}{H} - \frac{p_0 \cdot \mu}{H \cdot \bar{\beta}^2} \quad \dots \quad (H 7b) \end{aligned}$$

$$\bar{\varphi}' = \bar{B}_1 \cdot \sinh \bar{\lambda} x + \bar{B}_2 \cdot \cosh \bar{\lambda} x + \frac{1}{GJ_D} \left(\bar{M}_D + \frac{d^2 \bar{M}_D}{\bar{\lambda}^2 \cdot dx^2} \right)$$

$$= \bar{B}_1 \cdot \sinh \bar{\lambda} x + \bar{B}_2 \cdot \cosh \bar{\lambda} x + \frac{M_D}{GJ_D} - \frac{m'_D \cdot z}{GJ_D \cdot \bar{\lambda}^2}$$

oder

$$\bar{\varphi} = \bar{C}_1 \cdot \sinh \bar{\lambda} x + \bar{C}_2 \cdot \cosh \bar{\lambda} x + \bar{C}_3 + \frac{m_D \cdot z}{GJ_D} - \frac{m_D \cdot z}{GJ_D \cdot \bar{\lambda}^2} \quad (T 7b)$$

Hierbei gilt

$$\bar{\beta}^2 = \frac{H}{E\bar{J}} \quad \text{und} \quad \bar{\lambda}^2 = \frac{GJ_D}{E\bar{F}_{ww}}.$$

Bei durchlaufenden Stäben sind die Formänderungen benachbarter Stäbe über den Auflagern verträglich, wenn die Querschnittsverdrehungen oder die Querschnittsverwölbungen links und rechts von den Auflagern gleich groß sind (Klaffungen $\delta_{10} = 0$). Bei Berücksichtigung der sekundären Schubverformungen sind die Querschnittsverdrehungen nicht mehr gleich den Stabverdrehungen wie in der „klassischen“ Theorie (siehe Bild 4 und Gl. (T, H 1)). Deshalb lauten die Kontinuitätsbedingungen über den Auflagern nach der erweiterten Theorie:

$$\bar{\eta}'_{Mv \text{ links}} = \bar{\eta}'_{Mv \text{ rechts}} \quad (H 7c) \quad \bar{\varphi}'_{w \text{ links}} = \bar{\varphi}'_{w \text{ rechts}} \quad \dots \quad (T 7c)$$

Diese Werte sind mit den gefundenen Lösungen:

$$\bar{\eta}'_{Mv} = \frac{1}{\mu} \left(\bar{\eta}' - \frac{Q_0}{H} (1 - \mu) \right) \quad \dots \quad (H 7d)$$

$$\bar{\varphi}'_w = \frac{1}{z} \left(\bar{\varphi}' - \frac{M_D}{GJ_D} (1 - z) \right) \quad \dots \quad (T 7d)$$

5. Rückführung der Ergebnisse auf die der „klassischen“ Theorie

Es werden die Lösungen der „klassischen“ Theorie (Gl. H, T 7a) mit den Lösungen der erweiterten Theorie (Gl. H, T 7b) am Beispiel des „statisch bestimmt“ gelagerten Stabes mit an den Stabenden angreifenden Biegemomenten oder Wölbmomenten (Wölbverdrehmomenteintegrale) verglichen (Bild 5).

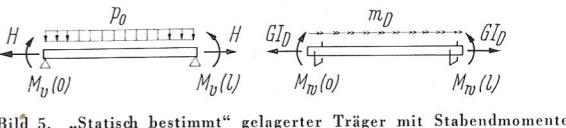


Bild 5. „Statisch bestimmt“ gelagerte Träger mit Stabendmomenten

Man erhält für die Schnittgrößen:

$$Q_0 = Q_0^I + \frac{M_v(l) - M_v(0)}{l},$$

$$M_0 = M_0^I + \frac{M_v(l) \cdot x + M_v(0)(l-x)}{l},$$

$$M_D = M_D^I + \frac{M_w(l) - M_w(0)}{l},$$

$$\int_0^x M_D dx = \int_0^x M_D^I dx + \frac{M_w(l) \cdot x + M_w(0)(l-x)}{l}.$$

Lastfall I:

$$\bar{Q}_v^I = \mu \cdot Q_v^*$$

$$\bar{M}_v^I = \mu \cdot M_v^*$$

$$\bar{\eta}^I = \frac{M_0^I - \mu \cdot M_v^*}{H} = \frac{\int_0^x M_D^I dx - z \cdot M_w^*}{G J_D} =$$

$$= \mu \cdot \eta^* + \frac{M_0^I}{H} (1 - \mu) = z \cdot \varphi^* + \frac{\int_0^x M_D^I dx}{G J_D} (1 - z)$$

$$\bar{\eta}_{M_v}^I = \frac{Q_0^I - Q_v^*}{H} = \eta^{*I}$$

$$\bar{\varphi}_w^I = \frac{M_D^I - M_{DS}^*}{G J_D} = \varphi^{*I}$$

Lastfall II:

$$\bar{Q}_v^{II} = Q_v^*$$

$$\bar{M}_v^{II} = M_v^*$$

$$\bar{\eta}^{II} = \frac{M_0^{II} - M_v^*}{H} = \eta^*$$

$$\bar{\eta}_{M_v}^{II} = \frac{Q_0^{II} - Q_v^*}{H} = \eta^{*II}$$

$$\bar{\varphi}_w^{II} = \frac{M_D^{II} - M_{DS}^*}{G J_D} = \varphi^{*II}$$

$$= \frac{1}{\mu} \eta^{*I} + \frac{Q_0^{II}}{H} \cdot \frac{\mu - 1}{\mu} = \frac{1}{z} \varphi^{*I} + \frac{M_D^{II}}{G J_D} \cdot \frac{z - 1}{z}$$

Die mit * versehenen Größen sind die Ergebnisse der „klassischen“ Theorie, gerechnet mit \bar{J} und \bar{F}_{ww} . Die Beziehungen für Lastfall I gelten auch bei äußerer Belastung durch Einzellasten P oder M_D oder, wenn die Gleichtlast p_0 oder m_D nur abschnittsweise wirkt.

Man erkennt dabei den besonderen Vorteil, der sich bei Berechnung von durchlaufenden Stäben nach der Kraftgrößenmethode (Unbekannte $X_i = M_{v, st}$ oder $X_i = M_{w, st}$ über den Stützen) bietet. Der Lastfall I entspricht dem „statisch bestimmten“ Grundsystem ($X_i = 0$) mit der äußeren Belastung. Die zugehörigen Klaffungen über den Stützen sind nach Gl. (H, T 7 c):

$$\delta_{i0} = \bar{\eta}_{M_v, \text{links}}^I + \bar{\eta}_{M_v, \text{rechts}}^I \quad \text{oder} \quad \delta_{i0} = \bar{\varphi}_{w, \text{links}}^I + \bar{\varphi}_{w, \text{rechts}}^I.$$

Der Lastfall II stellt den Zustand „X“ ($X_i = 1$) dar mit

$$\delta_{i0} = \bar{\eta}_{M_v, \text{links}}^{II} + \bar{\eta}_{M_v, \text{rechts}}^{II} \quad \text{oder} \quad \delta_{i0} = \bar{\varphi}_{w, \text{links}}^{II} + \bar{\varphi}_{w, \text{rechts}}^{II}.$$

Da das Superpositionsgegesetz gilt, lauten die Elastizitätsgleichungen zur Bestimmung der Unbekannten X_i :

$$\delta_{i0} + \sum X_k \cdot \delta_{ik} = 0.$$

6. Betrachtung von Sonderfällen

6.1. Kragträger (Bild 6)

Es ist zweckmäßig, auch für die Berechnung des Kragträgers die Aufteilung in Lastfall I und Lastfall II durchzuführen. Der Lastfall I (Bild 7) entspricht einseitiger einspannungsfreier Auflagerung des Biegestabes mit Axialzug oder einseitiger wölbunbehinderter Gabellagerung des Torsionsstabes („statisch bestimmtes“ Grundsystem).

Dieser Lastfall setzt sich zusammen aus einem Lastfall I^a nach Bild 8 und einem Lastfall I^b nach Bild 9.

Die Berechnung des Lastfalls I^a ist in Abschnitt 5 behandelt. Der Lastfall I^b ergibt

$$Q_v = M_v = 0 \quad M_{DS} = M_w = 0$$

$$\bar{\eta}^{Ib'} = \bar{\eta}_{M_v}^{Ib'} = \frac{Q_0(l)}{H} \quad \bar{\varphi}_w^{Ib'} = \bar{\varphi}_w^{Ib'} = \frac{M_D(l)}{G J_D}.$$

Der Lastfall II (Bild 10) entspricht dem an der Einspannstelle angreifenden Biegemoment oder Wölbmoment, das die Kontinuitätsbedingung liefert. Dieser Lastfall kann in einen Lastfall II^a nach Bild 11 und einen Lastfall II^b nach Bild 12 zerlegt werden.

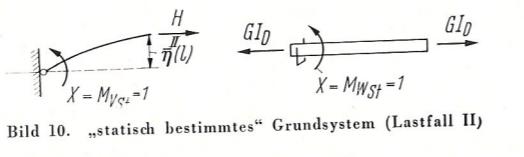
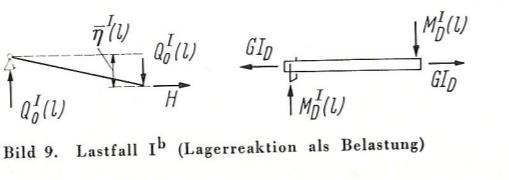
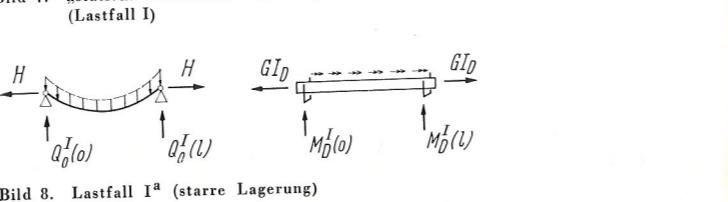
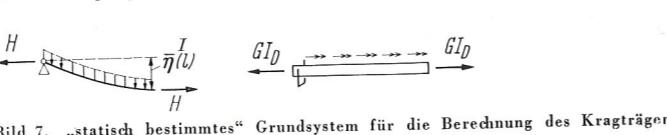
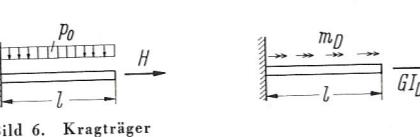


Bild 10. „statisch bestimmtes“ Grundsystem (Lastfall II)

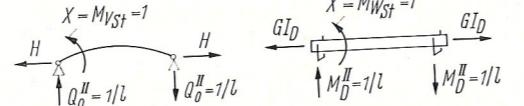


Bild 11. Lastfall IIa (starre Lagerung)

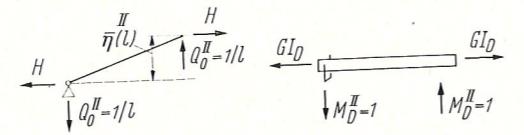


Bild 12. Lastfall IIb (Lagerreaktion als Belastung)

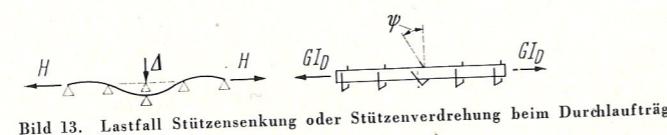


Bild 13. Lastfall Stützensenkung oder Stützenverdrehung beim Durchlaufträger

Der Lastfall II^a wurde behandelt, für den Lastfall II^b erhält man:

$$Q_v = M_v = 0 \quad M_{DS} = M_w = 0$$

$$\bar{\eta}' = \bar{\eta}'_{M_v} = \frac{Q_0^I}{H} = \frac{1}{H \cdot l} \quad \bar{\varphi}' = \bar{\varphi}'_w = \frac{M_D^I}{G J_D} = \frac{1}{G J_D \cdot l}.$$

Die Unbekannte $X = M_{v, st}$ oder $X = M_{w, st}$ folgt aus der Elastizitätsgleichung:

$$\delta_0 - X \cdot \delta_1 = 0$$

mit:

$$\delta_0 = \bar{\eta}_{M_v}^{Ia'} + \bar{\eta}_{M_v}^{Ib'} \quad \text{oder} \quad \delta_0 = \bar{\varphi}_w^{Ia'} + \bar{\varphi}_w^{Ib'}$$

und

$$\delta_1 = \bar{\eta}_{M_v}^{IIa'} + \bar{\eta}_{M_v}^{IIb'} \quad \text{oder} \quad \delta_1 = \bar{\varphi}_w^{IIa'} + \bar{\varphi}_w^{IIb'}.$$

6.2. Veränderung der Auflagerbedingungen bei durchlaufenden Stäben

Der Lastfall „Stützensenkung“ beim durchlaufenden Biegeträger mit Axialzug entspricht dem Lastfall „Auflagerverdrehung“ beim Torsionsstab (Bild 13).

Die Beanspruchungen für den Lastfall Ib sind:

$$Q_v = M_v = 0; \quad M_{DS} = M_w = 0.$$

Die Formänderungen werden über Gleichgewichtsbetrachtungen an jeder Feder berechnet:

$$Q_{0n}^I - H \left(\bar{\eta}_{n-1}^{Ib'} + \bar{\eta}_n^{Ib'} \right) - c_n \cdot \bar{\eta}_n^{Ib'} = 0;$$

$$M_{Dn}^I - G J_D \left(\bar{\varphi}_{n-1}^{Ib'} + \bar{\varphi}_n^{Ib'} \right) - c_n \cdot \bar{\varphi}_n^{Ib'} = 0.$$

Mit

$$\bar{\eta}_n^{Ib'} = \frac{\bar{\eta}_n^{Ib} - \bar{\eta}_{n+1}^{Ib}}{l_n}$$

$$\bar{\varphi}_n^{Ib'} = \frac{\bar{\varphi}_n^{Ib} - \bar{\varphi}_{n+1}^{Ib}}{l_n}$$

folgt:

$$\bar{\eta}_{n-1}^{Ib} \cdot \frac{H}{l_{n-1}} + \bar{\eta}_n^{Ib} \left(\frac{H}{l_n} - \frac{H}{l_{n-1}} + c_n \right) - \bar{\eta}_{n+1}^{Ib} \cdot \frac{H}{l_n} = Q_{0n}^I$$

bzw.

$$\bar{\varphi}_{n-1}^{Ib} \cdot \frac{G J_D}{l_{n-1}} + \bar{\varphi}_n^{Ib} \left(\frac{G J_D}{l_n} - \frac{G J_D}{l_{n-1}} + c_n \right) - \bar{\varphi}_{n+1}^{Ib} \cdot \frac{G J_D}{l_n} = M_{Dn}^I.$$

Schreibt man diese Gleichgewichtsgleichungen für jede Feder an, so erhält man die Matrix zur Berechnung der gesuchten Durchbiegungen $\bar{\eta}^{Ib}$ oder Drehwinkel $\bar{\varphi}^{Ib}$, aus denen man wiederum die Stabverdrehungen $\bar{\eta}^{Ib'}$ oder Stabverdrillungen $\bar{\varphi}^{Ib'}$ ermitteln kann.

Die Elastizitätsglieder für den Lastfall I sind also:

$$\delta_{i0} = \bar{\eta}_{M_v, \text{links}}^{Ia'} + \bar{\eta}_{M_v, \text{rechts}}^{Ia'} + \bar{\eta}_{M_v}^{Ib'} + \bar{\eta}_{M_w}^{Ib'}$$

oder

$$\delta_{i0} = \bar{\varphi}_w^{Ia'} + \bar{\varphi}_w^{Ia'} + \bar{\varphi}_w^{Ib'} + \bar{\varphi}_w^{Ib'}.$$

Im Lastfall II werden die Biegemomente oder Wölbmomente über den Auflagern angesetzt. Auch dieser Lastfall wird in einen Lastfall II^a (starre Stützen) nach Bild 20 und einen Lastfall II^b (elastische Stützen) nach Bild 21 zerlegt. Die Berechnung für Lastfall II^a ist in Abschnitt 5 angegeben; Lastfall II^b wird wie Lastfall I^b berechnet.

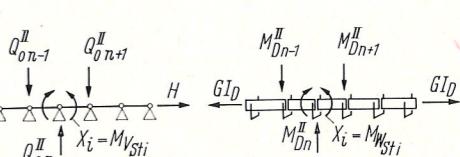


Bild 20. Lastfall IIa (starre Lagerung)

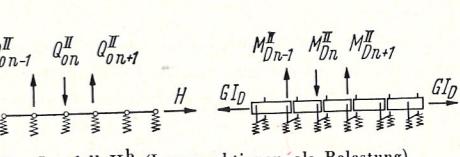


Bild 21. Lastfall IIb (Lagerreaktionen als Belastung)

Die Elastizitätsglieder für Lastfall II sind also:

$$\delta_{ik} = \bar{\eta}_{M_v, \text{links}}^{IIa'} + \bar{\eta}_{M_v, \text{rechts}}^{IIa'} + \bar{\eta}_{M_v}^{IIb'} + \bar{\eta}_{M_w}^{IIb'}$$

oder

$$\delta_{ik} = \bar{\varphi}_w^{IIa'} + \bar{\varphi}_w^{IIa'} + \bar{\varphi}_w^{IIb'} + \bar{\varphi}_w^{IIb'}.$$

Über die Elastizitätsgleichungen $\delta_{i0} + X_i \cdot \delta_{ik} = 0$ erhält man die Unbekannten X_i .

In der Praxis wird man bei größerer Anzahl der federnden Auflager das vorstehende Verfahren nur zur Berechnung eines Grundsystems mit nur zwei federnden Auflagern benutzen und mit diesem

Grundsystem in dem Sinne weiterrechnen, daß die restlichen Auflagerkräfte oder Auflagerverdrehmomente als Unbekannte (Gruppenlasten) eingeführt werden (Bild 22).

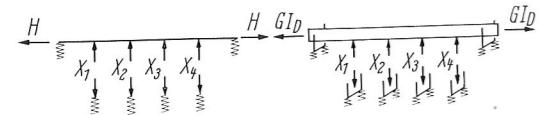


Bild 22. Elastisch gelagertes Grundsystem mit Auflagerreaktionen als Unbekannte

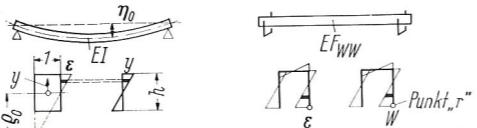


Bild 23. Verformungen des 'statisch bestimmt' gelagerten Stabes ohne Axialzug oder S.t. Venantsche Torsionssteifigkeit

6.4. Lastfall „Ungleichmäßige Erwärmung“

Es wird der Erwärmungszustand untersucht, bei dem die über den Querschnitt veränderliche Wärmedehnung affin zur Biegedehnung (Biegestab mit Axialzug) oder zur Torsionsverwölbung (Torsionsstab) verläuft.

Zunächst betrachtet man die Verformungen am 'statisch bestimmt' gelagerten Biegestab ohne Axialzug oder Torsionsstab ohne S.t. Venantsche Torsionssteifigkeit $G J_D$. Aus Bild 23 folgt:

$$\frac{1}{\varrho_0} = -\eta_0'' = \frac{\varepsilon}{y} = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_u}{h} = \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h};$$

$$\frac{1}{\varrho_0} = -\varphi_0'' = \frac{\varepsilon}{w} = \frac{\alpha_t \cdot \Delta t^r}{w_r}.$$

Diese Verformung kann durch Randbiegemomente M_v^i oder Randwölbmomente M_w^i (Fesselkräfte) rückgängig gemacht werden:

$$M_v^i = \frac{E \cdot J}{\varrho_0} = \frac{E \cdot \bar{J} \cdot \alpha_t \cdot \Delta t \cdot \mu}{h};$$

$$M_w^i = \frac{E \cdot F_{ww}}{\varrho_0} = \frac{E \cdot \bar{F}_{ww} \cdot \alpha_t \cdot \Delta t^r \cdot z}{w_r}.$$

Diese Fesselkräfte, die ideellen Biegemomente M_v^i oder die Wölbmomente M_w^i , werden nun als Belastung auf den 'statisch bestimmt' gelagerten Biegestab mit Axialzug oder Torsionsstab mit S.t. Venantscher Torsionssteifigkeit aufgebracht (Bild 24). Die zugehörigen Verformungen (Berechnung nach Abschnitt 5) sind die wirklichen Verformungen des erwärmten Stabes. Die Beanspruchungen setzen sich zusammen aus den Beanspruchungen des 'statisch bestimmt' gelagerten Biegestabes (Bild 25) und den Beanspruchungen nach Bild 24.

Bei durchlaufenden Stäben ergeben sich die Elastizitätsglieder zur Berechnung der unbekannten Stützenbiegemomente oder Stützenwölbmomente zu

$$\delta_{0,links} = \bar{\eta} M_{v,links}; \quad \delta_{0,links} = \bar{\varphi}_{w,links}.$$

7. Zahlenbeispiel

7.1. System und Abmessungen

Die praktische Anwendung des 'Kraftgrößenverfahrens' soll am Beispiel der Berechnung einer Mittelträgerbrücke mit dem System nach Bild 26 gezeigt werden.

Der Querschnitt sei über die Brücke konstant und nach Bild 27 ausgebildet. Für die Berechnung wird er entsprechend Bild 28 idealisiert, wobei die Querschnittsfläche der ausgesteiften Deck- und Bodenbleche um die Fläche der Längsrippen vergrößert und die Fläche des Randträgeruntergurtes $250 \cdot 10$ im Pkt. 6 konzentriert gedacht wird.

Gesucht seien die Torsionsschnittgrößen M_w , M_{DS} , M_{DP} am Auflager B. Zur Veranschaulichung des Einflusses der Schubverformung werden die Ergebnisse der 'klassischen' und der erweiterten Theorie miteinander verglichen.

7.2. Querschnittswerte

Die ausführliche Berechnung der Einheitsverwölbung und der Querschnittswerte F_{ww} und J_D wird in [2] an einem Beispiel gezeigt. Wir setzen daher den Verlauf der Einheitsverwölbung nach Bild 28 und die Querschnittswerte $F_{ww} = 22300 \text{ cm}^2 \text{ m}^4$ und $J_D = 6680 \text{ cm}^2 \text{ m}^2$ voraus und beschränken uns auf die Berechnung des Schubbeiwertes ζ .

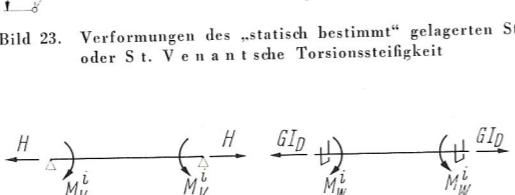


Bild 24. Belastung des 'statisch bestimmt' gelagerten Stabes mit Axialzug oder S.t. Venantscher Torsionssteifigkeit durch Fesselkräfte

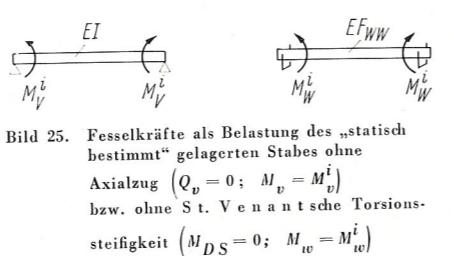
Bild 25. Fesselkräfte als Belastung des 'statisch bestimmt' gelagerten Stabes ohne Axialzug ($Q_b = 0$; $M_v = M_v^i$) bzw. ohne S.t. Venantsche Torsionssteifigkeit ($M_{DS} = 0$; $M_w = M_w^i$)

Bild 26. System der Mittelträgerbrücke mit Seilabspannung

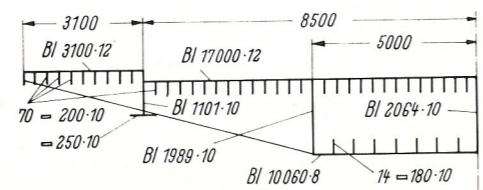
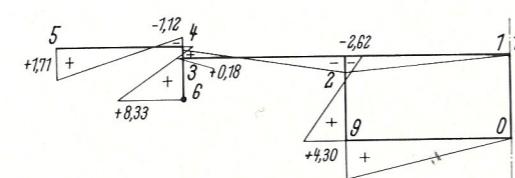


Bild 27. Querschnitt

Bild 28. Verlauf der Einheitsverwölbung w [m^2]

Mit (T 5) und (T 2 f) wird:

$$\frac{1}{\zeta} = 1 + \frac{1}{\nu_\varphi} = 1 + \frac{J_D}{F_{ww}^2} \int_F \left(\frac{\oint F_w(s) \frac{ds}{t}}{\oint \frac{ds}{t}} - F_w(s) \right)^2 \frac{ds}{t} =$$

$$= 1 + \frac{J_D}{F_{ww}^2} \int_F \left(\frac{\Phi_w - F_w(s)}{t} \right)^2 dF =$$

$$= 1 + \frac{J_D}{F_{ww}^2} \int_F G(s)^2 dF. \quad \dots \quad (T 2 g)$$

Die $F_w(s)$ -Werte werden in Tafel 1 nach folgender Beziehung ermittelt:

$$F_w(s) = \int w dF = \frac{1}{2} \sum (w_i + w_k) \Delta F.$$

Tafel 1: Ermittlung der $F_w(s)$ -Werte

Pkt.	Strecke	w_i	w_k	ΔF	$w_i + w_k$	$(w_i + w_k) \Delta F$	$2 \int w dF$	$F_w(s)$
6	6	8,33	—	25,0	8,33	215	—	$0 + 215 = 215$
3	6-3	8,33	0,18	93,5	8,51	814	—	$215 + 814 = 1029$
4	4-5	-1,12	1,71	552	0,59	262	—	$0 + 262 = 262$
3	3-4	0,18	-1,12	16,5	-0,94	—	-16	$262 - 16 = 246$
3	—	—	—	—	—	—	$246 + 1029 = 1275$	$123,0$
2	2-3	-2,62	0,18	640	-2,44	—	-1555	$1275 - 1555 = -280$
2	1-2	—	-2,62	—900	-2,62	—	-2330	$0 - 2330 = -2330$
2	2	—	—	—	—	—	$-280 - 2330 = -2610$	-1165
9	2-9	-2,62	4,30	199,5	1,68	335	—	$-2610 + 335 = -2275$
0	9-0	4,30	—	528,5	4,30	2275	—	$-2275 + 2275 = 0$
\sum								
$+3901$								
-3901								
$= 0$								

Die $F_w(s)$ -Verteilung ist in Bild 29 über dem Querschnitt aufgetragen.

Das Zusatzglied $\Phi_w = \frac{\oint F_w(s) \frac{ds}{t}}{\oint \frac{ds}{t}}$ wird unter Berücksichtigung von

$$\oint F_w(s) \frac{ds}{t} = \frac{1}{2} [F_w(s)_i + F_w(s)_k] \frac{ds}{t} + \frac{1}{12} [w_i - w_k] \Delta s^2$$

([2] Seite 33) bestimmt. Die Berechnung von $\oint F_w(s) \frac{ds}{t}$ erfolgt in Tafel 2 und erstreckt sich aus Symmetriegründen nur über eine

Tafel 2: Berechnung von $\oint F_w(s) \frac{ds}{t}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Strecke	$F_w(s)_i$	$F_w(s)_k$	$(2) + (3)$	w_i	w_k	$(5) - (6)$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta s}{t}$	$\frac{1}{12} \Delta s^2$	$(4) \cdot (8)$	$(7) \cdot (9)$
$i-k$	$\text{cm}^2 \text{ m}^2$	$\text{cm}^2 \text{ m}^2$	$\text{cm}^2 \text{ m}^2$	m^2	m^2	m^2	m^2	$\text{cm}^2 \text{ m}^2$	$\text{cm}^2 \text{ m}^2$	$\text{cm}^2 \text{ m}^2$
1-2	0	—	—1165	—1165	—	—2,62	2,62	208,3	20833	—243 000
2-9	—1305,5	—	—1138	—2443,5	—2,62	4,30	—6,92	100	3330	—244 350
9-0	—1138	—	—	—1138	4,30	—	4,30	312,5	20833	—356 000
\sum									—843 350	+121 200

Tafel 3: Berechnung des Integrals $\int G(s)^2 dF$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Strecke	ΔF	G_i	G_k	$G_i^2 \Delta F$	$G_k^2 \Delta F$	$G_i \cdot G_k \Delta F$	Δs	w_i	w_k	$w_i - w_k$	$\frac{(w_i - w_k)^2}{\Delta s^2 \Delta F}$
$i-k$	m^2	$\text{cm} \text{ m}^2$	$\text{cm} \text{ m}^2$	$\text{cm}^2 \text{ m}^6$	$\text{cm}^2 \text{ m}^6$	$\text{cm}^2 \text{ m}^6$	cm	m^2	m^2	m^2	$\text{cm}^2 \text{ m}^6$

Mit

$$\Delta F_{wm} = \frac{1}{8} (w_i - w_k) \cdot \Delta s \cdot t \quad ([2] S. 33)$$

wird

$$\int G(s)^2 dF = \frac{1}{3} \sum (G_i^2 + G_k^2 + G_i \cdot G_k) \Delta F + \frac{1}{120} (w_i - w_k)^2 \Delta s^2 \Delta F.$$

Die zahlenmäßige Ausrechnung erfolgt in Tafel 3.

Es folgt

$$\int G(s)^2 dF = \frac{2}{3} (100440 + 98500 + 16060) + \frac{2}{120} 551900 = 143400 + 9800 = 152600 \text{ [cm}^2 \text{ m}^6\text{].}$$

Der Wölbshubparameter wird nach (T 2 g) ermittelt:

$$\frac{1}{\nu_q} = \frac{6680 \cdot 152600}{22300^2} = 2,05 \left[\frac{\text{cm}^2 \text{ m}^2 \text{ cm}^2 \text{ m}^6}{\text{cm}^4 \text{ m}^8} \right] = \text{.} / \cdot$$

$$\frac{1}{\nu} = 1 + 2,05 = 3,05; \quad z = 0,328.$$

7.3. Konstante für die Lösungsfunktionen

$$\lambda = \sqrt{\frac{G J_D}{E F_{ww}}} = \sqrt{\frac{6680}{2,6 \cdot 22300}} = 0,34;$$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{G J_D}{E \bar{F}_{ww}}} = \lambda \cdot \sqrt{z} = 0,34 \cdot \sqrt{0,328} = 0,194;$$

$$\sinh \lambda l_1 = \sinh 0,34 \cdot 50 = 0,121 \cdot 10^3;$$

$$\sinh \bar{\lambda} l_1 = \sinh 0,194 \cdot 50 = 0,816 \cdot 10^4;$$

$$\sinh \lambda l_2 = \sinh 0,34 \cdot 150 = 0,705 \cdot 10^{22};$$

$$\sinh \bar{\lambda} l_2 = \sinh 0,194 \cdot 150 = 0,203 \cdot 10^{13}.$$

Wegen der großen Argumente der hyperbolischen Funktion ergeben sich folgende Vereinfachungen:

$$\frac{1}{\sinh \lambda l_{1/2}} \approx 0; \quad \coth \lambda l_{1/2} \approx 1.$$

7.4. Einflußlinien für das Wölbmoment M_w an der Stütze BDas „statisch bestimmte“ Grundsystem mit den Wölbmomenten M_{w1} und M_{w2} als statisch Unbestimmte zeigt Bild 31.

a) Lastzustand „0“ nach Bild 32.

Aus [2] Tafel 14 folgt für $l = l_1$ oder $l = l_2$ bereichsweise:

$$\varphi'(x)_{\text{links}} = \frac{M_D}{E F_{ww} \cdot \bar{\lambda}^2} \left(\frac{b}{l} - \frac{\sinh \bar{\lambda} b}{\sinh \bar{\lambda} l} \cosh \bar{\lambda} x \right)$$

$$\varphi'(x)_{\text{rechts}} = \frac{M_D}{E F_{ww} \cdot \bar{\lambda}^2} \left(-\frac{a}{l} + \frac{\sinh \bar{\lambda} a}{\sinh \bar{\lambda} l} \cosh \bar{\lambda} x' \right).$$

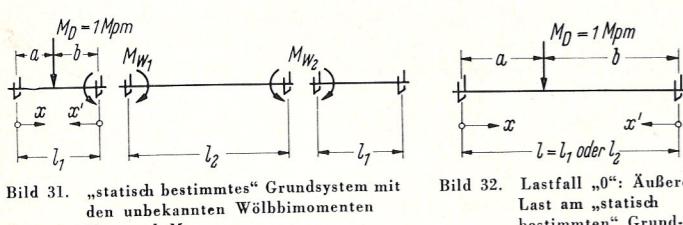
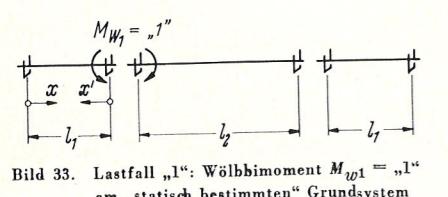
Bild 31. „statisch bestimmtes“ Grundsystem mit den unbekannten Wölbmomenten M_{w1} und M_{w2}

Bild 32. Lastfall „0“: Äußere Last am „statisch bestimmten“ Grundsystem

Bild 33. Lastfall „1“: Wölbmoment $M_{w1} = „1“$ am „statisch bestimmten“ Grundsystem

Die Beziehung zur erweiterten Theorie lautet entsprechend Lastfall I:

$$\bar{\varphi}'_w = \varphi^{*t}.$$

Mit $x = 0$ und $x' = 0$ und der Beziehung:

$$E F_{ww} \cdot \bar{\lambda}^2 = E \bar{F}_{ww} \cdot \bar{\lambda}^2 = G J_D$$

erhält man die Belastungsglieder:

$$G J_D \cdot \delta_0_{\text{links}} = E F_{ww} \cdot \bar{\lambda}^2 \cdot \varphi'_{\text{links}} = \frac{b}{l} - \frac{\sinh \bar{\lambda} b}{\sinh \bar{\lambda} l};$$

$$G J_D \cdot \bar{\delta}_0_{\text{links}} = \frac{b}{l} - \frac{\sinh \bar{\lambda} b}{\sinh \bar{\lambda} l};$$

$$G J_D \cdot \delta_0_{\text{rechts}} = -E F_{ww} \cdot \bar{\lambda}^2 \cdot \varphi'_{\text{rechts}} = \frac{a}{l} - \frac{\sinh \bar{\lambda} a}{\sinh \bar{\lambda} l};$$

$$G J_D \cdot \bar{\delta}_0_{\text{rechts}} = \frac{a}{l} - \frac{\sinh \bar{\lambda} a}{\sinh \bar{\lambda} l}.$$

b) Lastzustand „1“ nach Bild 33.

Aus [2] Tafel 15 folgt für das Seitenfeld:

$$\varphi'_1(x) = \frac{M_w}{E F_{ww} \cdot \bar{\lambda}} \left(\frac{1}{\bar{\lambda} l_1} - \frac{\cosh \bar{\lambda} x}{\sinh \bar{\lambda} l_1} \right) = \frac{M_w}{E F_{ww} \cdot \bar{\lambda}^2} \left(\frac{1}{l_1} - \bar{\lambda} \cdot \frac{\cosh \bar{\lambda} x}{\sinh \bar{\lambda} l_1} \right)$$

und für das Mittelfeld:

$$\varphi'_2(x) = -\frac{M_w}{E F_{ww} \cdot \bar{\lambda}^2} \left(\frac{1}{l_2} - \bar{\lambda} \cdot \frac{\cosh \bar{\lambda} x'}{\sinh \bar{\lambda} l_2} \right).$$

Die Beziehung zur erweiterten Theorie lautet entsprechend Lastfall II für das Seitenfeld:

$$\bar{\varphi}'_{w1}(x) = \frac{1}{z} \cdot \varphi^{*t} - \frac{M_D}{G J_D} \cdot \frac{z-1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{M_w}{E F_{ww} \cdot \bar{\lambda}^2} \cdot \frac{1}{l_1} - \frac{M_w}{E F_{ww} \cdot \bar{\lambda}^2} \cdot \frac{\bar{\lambda}}{z} \cdot \frac{\cosh \bar{\lambda} x}{\sinh \bar{\lambda} l_1} + \frac{M_w}{l_1 \cdot G J_D} - \frac{1}{z} \cdot \frac{M_w}{l_1 \cdot G J_D} = \frac{M_w}{E \bar{F}_{ww} \cdot \bar{\lambda}^2} \left(\frac{1}{l_1} - \frac{\bar{\lambda}}{z} - \frac{\cosh \bar{\lambda} x}{\sinh \bar{\lambda} l_1} \right)$$

und für das Mittelfeld:

$$\bar{\varphi}'_{w2}(x) = -\frac{M_w}{E \bar{F}_{ww} \cdot \bar{\lambda}^2} \left(\frac{1}{l_2} - \frac{\bar{\lambda}}{z} - \frac{\cosh \bar{\lambda} x'}{\sinh \bar{\lambda} l_2} \right).$$

Unter Berücksichtigung der Symmetrie des Tragwerks erhält man die Elastizitätsglieder:

$$G J_D \cdot \delta_{11} = G J_D \cdot \delta_{22} = E F_{ww} \cdot \bar{\lambda}^2 (\varphi'_{1 \text{ rechts}} - \varphi'_{2 \text{ links}}) = \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} - \bar{\lambda} (\coth \bar{\lambda} l_1 + \coth \bar{\lambda} l_2) = \frac{1}{50} + \frac{1}{150} - 0,34 \cdot 2 = -0,66 (\approx -0,68),$$

$$G J_D \cdot \bar{\delta}_{11} = G J_D \cdot \bar{\delta}_{22} = \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} - \frac{\bar{\lambda}}{z} (\coth \bar{\lambda} l_1 + \coth \bar{\lambda} l_2) = \frac{1}{50} + \frac{1}{150} - \frac{0,194}{0,328} \cdot 2 = -1,16 (\approx -1,18),$$

$$G J_D \cdot \delta_{21} = G J_D \cdot \delta_{12} = -E F_{ww} \cdot \bar{\lambda}^2 \cdot \varphi'_{2 \text{ rechts}} = \frac{1}{l_2} - \bar{\lambda} \cdot \frac{1}{\sinh \bar{\lambda} l_2} = \frac{1}{150} = 0,006 (\approx 0,0),$$

$$G J_D \cdot \bar{\delta}_{21} = G J_D \cdot \bar{\delta}_{12} = \frac{1}{l_2} - \frac{\bar{\lambda}}{z} \cdot \frac{1}{\sinh \bar{\lambda} l_2} = \frac{1}{150} = 0,006 (\approx 0,0).$$

Wenn man bei der Berechnung der $G J_D \cdot \delta$ -Werte und der $G J_D \cdot \bar{\delta}$ -Werte die $\frac{1}{l_{1/2}}$ -Glieder näherungsweise vernachlässigt, erhält man die eingeklammerten Zahlenwerte und damit einfach

$$M_w = -\frac{G J_D \cdot \delta_0}{G J_D \cdot \delta_{11}}.$$

Für Belastung im Seitenfeld folgt

$$\eta_{M_w} = -\frac{\delta_{01 \text{ rechts}}}{\delta_{11}} = -\frac{\frac{a}{l_1} - \frac{\sinh \bar{\lambda} a}{\sinh \bar{\lambda} l_1}}{0,68};$$

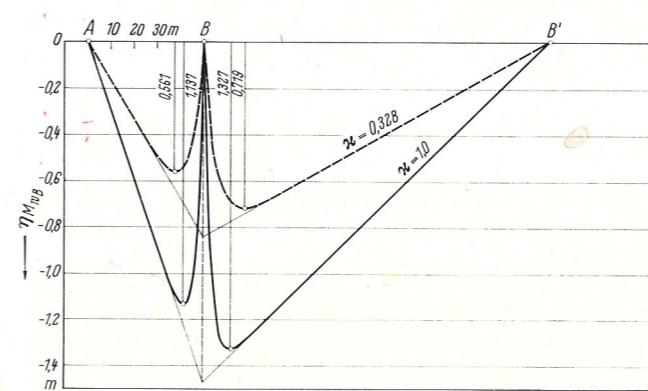
$$\bar{\eta}_{M_w} = -\frac{\frac{a}{l_1} - \frac{\sinh \bar{\lambda} a}{\sinh \bar{\lambda} l_1}}{1,18}.$$

Für Belastung im Mittelfeld:

$$\eta_{M_w} = -\frac{\delta_{02 \text{ links}}}{\delta_{11}} = -\frac{\frac{b}{l_2} - \frac{\sinh \bar{\lambda} b}{\sinh \bar{\lambda} l_2}}{0,68};$$

$$\bar{\eta}_{M_w} = -\frac{\frac{b}{l_2} - \frac{\sinh \bar{\lambda} b}{\sinh \bar{\lambda} l_2}}{1,18}.$$

Die Ergebnisse der numerischen Berechnung sind in Bild 34 dargestellt.

Bild 34. Einflußlinien für das Wölbmoment M_w_B an der Stütze B für $z = 1,0$ und $z = 0,328$

7.5. Einflußlinien für das primäre und sekundäre Torsionsmoment an der Stütze B (rechts)

Die Ordinaten der Einflußlinien für $M_{DSB \text{ rechts}}$ und $M_{DPB \text{ rechts}}$ setzen sich aus den Einflußordinaten $M_{DS2 \text{ links}}^I$ und $M_{DP2 \text{ links}}^I$ für den „statisch bestimmt“ gelagerten Mittelfeldträger (Lastfall I) und den Einflußordinaten $M_{DS2 \text{ links}}^{II}$ und $M_{DP2 \text{ links}}^{II}$ aus der Wirkung des statisch überzähligen Wölbmoments M_{wB} (Lastfall II) zusammen.

a) Lastfall I:

Aus [2] Tafel 14 folgt (siehe Bild 31)

$$M_{DS2 \text{ links}}^I = \frac{\sinh \bar{\lambda} b}{\sinh \bar{\lambda} l_2};$$

$$M_{DP2 \text{ links}}^I = M_{D2 \text{ links}} - M_{DS2 \text{ links}}^I = \frac{b}{l_2} - \frac{\sinh \bar{\lambda} b}{\sinh \bar{\lambda} l_2}.$$

Die Beziehung zur erweiterten Theorie lautet:

$$\bar{M}_{DS} = z \cdot M_{DS}^*$$

Also:

$$\bar{M}_{DS2 \text{ links}} = z \cdot \frac{\sinh \bar{\lambda} b}{\sinh \bar{\lambda} l_2};$$

$$\bar{M}_{DP2 \text{ links}} = M_{D2 \text{ links}} - \bar{M}_{DS2 \text{ links}} = \frac{b}{l_2} - z \cdot \frac{\sinh \bar{\lambda} b}{\sinh \bar{\lambda} l_2}.$$

b) Lastfall II: (siehe Bild 33)

$$M_{DS2 \text{ links}}^I = M_{w1} \cdot \bar{\lambda} \cdot \coth \bar{\lambda} l_2 = M_{w1} \cdot \bar{\lambda};$$

$$M_{DP2 \text{ links}}^I = M_{w1} \left(\frac{1}{l_2} - \bar{\lambda} \cdot \coth \bar{\lambda} l_2 \right) = M_{w1} \left(\frac{1}{l_2} - \bar{\lambda} \right);$$

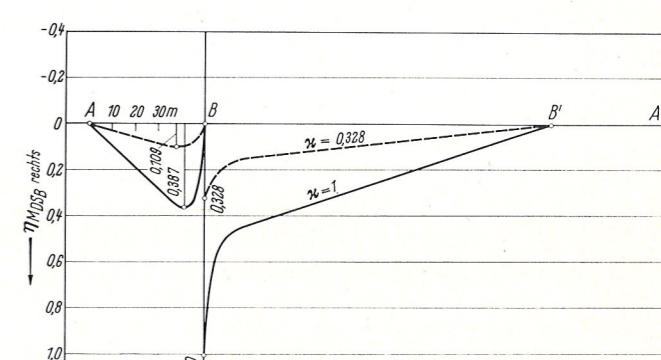
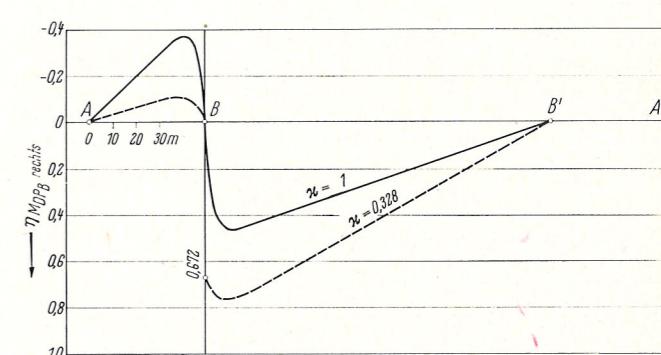
Hier lautet die Beziehung zur erweiterten Theorie:

$$\bar{M}_{DS} = M_{DS}^*.$$

Also:

$$\bar{M}_{DS2 \text{ links}} = \bar{M}_{w1} \cdot \bar{\lambda}; \quad \bar{M}_{DP2 \text{ links}} = \bar{M}_{w1} \left(\frac{1}{l_2} - \bar{\lambda} \right).$$

Die Ergebnisse der numerischen Berechnung sind in Bild 35 und Bild 36 zusammengestellt.

Bild 35. Einflußlinien für das sekundäre Torsionsmoment M_{DS} an der Stütze B (rechts) für $z = 1$ und $z = 0,328$ Bild 36. Einflußlinien für das primäre Torsionsmoment M_{DP} an der Stütze B (rechts) für $z = 1$ und $z = 0,328$

7.6. Vergleich der Ergebnisse

Ein Vergleich der beiden Einflußlinien für das Wölbmoment M_{wB} in Bild 34 zeigt, daß hierbei für größere Werte $\bar{\lambda} \cdot l$ der Einfluß der Schubverformung näherungsweise durch einen Abminderungsfaktor

$$k \approx \frac{\delta_{11}}{\delta_{11}} \approx \frac{\bar{\lambda} \cdot z}{\bar{\lambda}} = \frac{\bar{\lambda} \cdot z}{\bar{\lambda} \cdot \sqrt{z}} = \sqrt{z}$$

Die gefundenen Differentialgleichungen entsprechen formal den Differentialgleichungen der „klassischen“ Theorie, wenn man die Biegesteifigkeit oder die Wölbsteifigkeit mit einem Faktor verzerrt. Es wird am Beispiel des Durchlaufträgers gezeigt, daß man mit den verzerrten Steifigkeiten die Lösungen der „klassischen“ Theorie benutzen kann. Wie bei der Kraftgrößenmethode für die Berechnung des durchlaufenden Biegeträgers werden die Biegemomente oder Wölbmomente über den Stützen als statisch Überzählige eingeführt.

Der Vorteil der Kraftgrößenmethode wird auch für Sonderfälle gezeigt, wie für den Kragarm, Durchlaufträger mit Stützensenkung oder Stützenverdrehung, elastisch gelagerten Durchlaufträger und den Durchlaufträger mit ungleichmäßiger Erwärmung des Querschnitts. An einem Zahlenbeispiel wird die Anwendung der Kraftgrößenmethode erläutert und die erhebliche Abminderung der Wölbnormalspannungen gegenüber der „klassischen“ Theorie gezeigt.

Schrifttum

- [1] Bornscheuer, F. W.: Systematische Darstellung des Biege- und Verdrehvorganges. Der Stahlbau 21 (1952), H. 1, S. 1.
- [2] Bornscheuer, F. W.: Beispiel und Formelsammlung zur Spannungsberechnung dünnwandiger Stäbe. Der Stahlbau 21 (1952), H. 12, S. 225, Der Stahlbau 22 (1953), H. 2, S. 32.
- [3] Lindenberg, H.: Vergleich und Analogiebetrachtung der Lösungen für biegebeanspruchte und verdrehungsbeanspruchte Stabwerke. Der Stahlbau 22 (1953), H. 1, S. 14, und H. 3, S. 64.
- [4] Kloppe, K. und Lie, K. H.: Nebeneinflüsse bei der Berechnung von Hängebrücken nach der Theorie II. Ordnung. Forschungshefte a. d. Gebiete des Stahlbaus, H. 5. Berlin 1942. Herausgegeben vom Deutschen Stahlbauverband.
- [5] Heilig, R.: Der Schubverformungseinfluß auf die Wölbkrafttorsion von Stäben mit offenem Profil. Der Stahlbau 30 (1961), H. 4, S. 97.
- [6] Heilig, R.: Beitrag zur Theorie der Kastenträger beliebiger Querschnittsform. Der Stahlbau 30 (1961), H. 11, S. 333.
- [7] Lie, K. H.: Praktische Berechnung von Hängebrücken nach der Theorie II. Ordnung. Dissertation Darmstadt 1940.
- [8] Crosthwaite, C. D.: Shear Deflections in Latticed Structures (Schubverformungen in Fachwerkkonstruktionen). Abhandlungen der IVBH (1952), Bd. XII, S. 91.

DK 624.93 : 69.057.1

Die Stahlkonstruktion für die Institutsgebäude IA, IB und IC der Ruhruniversität Bochum

Von Dipl.-Ing. R. Bender und Dipl.-Ing. F. Schäfers, Dortmund

1. Allgemeines

Das Land Nordrhein-Westfalen errichtet auf dem Gelände in Bochum-Querenburg die neue Ruhruniversität. Nach dem jetzigen Planungsstand sind für die Gesamtbebauung 13 Institutsgebäude als Hochhäuser, eine sogenannte erdnahen Bebauung, das sind Verbindungsgebäude, und die als Foren bezeichneten Zentralbauwerke mit Nutzung als Bibliotheken, Verwaltungen usw. vorgesehen. Darüber hinaus sind noch weitere Bauwerke mit erheblichem Umfang geplant.

Zur Frage der Gesamtplanung der Ruhruniversität Bochum wird auf andere Veröffentlichungen [1] verwiesen.

Der folgende Aufsatz beschränkt sich auf die drei Institutsgebäude der Ingenieurwissenschaften (I-Reihe). Es soll die Stahlkonstruktion dargelegt und erläutert werden, und zwar die in konstruktion dargelegt und erläutert werden, und zwar die in genauer Vorbereitung sowie die Werkstattbearbeitung und Montagedurchführung.

Die besondere Ingenieuraufgabe bei dem Bauvorhaben der Ruhruniversität Bochum liegt in der Entwicklung eines Großfertigelementes. Für den Stahlbauer ist das Bauen mit in Werkstätten vorbereiteten Fertigelementen, zum Beispiel im Hinblick auf Passgenauigkeiten, Transportmöglichkeiten, Montagedurchführungen usw., eine gewohnte Aufgabe, jedoch wird die Aufgabe komplexer, wenn das Fertigelement ein Ausbauelement für Bauwerke der

Architekten werden soll. Der Stahlbauer muß die Belange der Nachbardisziplinen im besonderen Maße kennen und konstruktiv berücksichtigen.

Für die Baudurchführung ist zu beachten, daß sich der Gesamtrohbau aus Konstruktionsgliedern des Stahlbaus und des Stahlbetonbaus zusammensetzt, wobei die Regeln der Typen- und der Serienbauweise angewandt wurden.

Aus dem Zusammenwirken der beiden Gewerke ergaben sich Abhängigkeiten, die zu einer strengen Vorplanung der Arbeitsabläufe zwangen.

2. Beschreibung der Konstruktion

Wie aus den Bildern 1, 2 und 3 zu ersehen ist, haben die einzelnen Gebäude folgende Abmessungen (Systemmaße):

Länge	$15 \times 7,50 \text{ m}$	$= 112,5 \text{ m}$
Breite	$3 \times 7,50 \text{ m}$	$= 22,5 \text{ m}$
Höhe	$3 \times 4,55 \text{ m} = 13,65 \text{ m}$	
	$6 \times 3,85 \text{ m} = 23,10 \text{ m}$	$= 36,75 \text{ m}$

Jedes Gebäude ist durch eine Fuge (Doppelstütze) in zwei statisch selbständige Baukörper getrennt. Die Notwendigkeit der

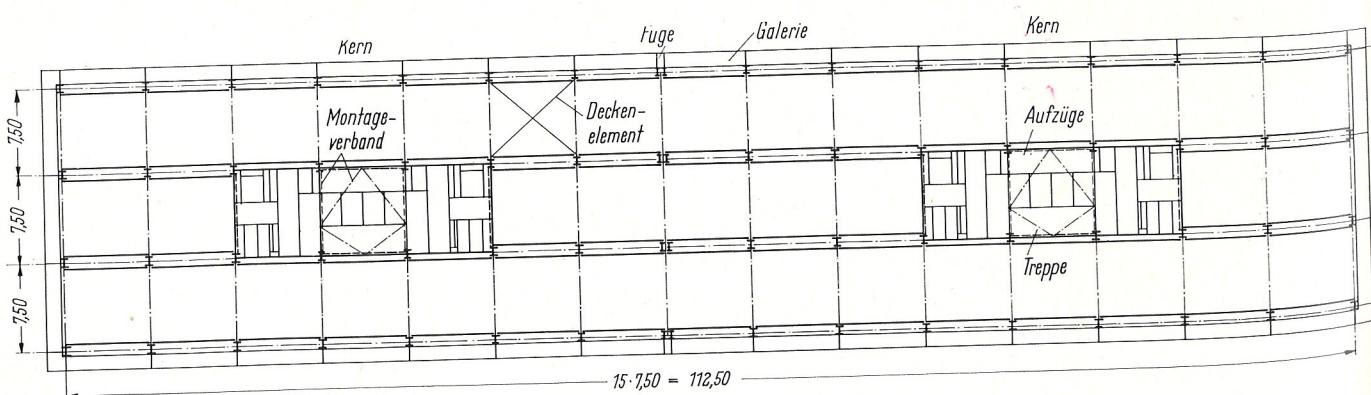


Bild 1. Grundriß des Normalgeschosses für Gebäude IA