

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{36} &= \mathfrak{B}_{63} = \mathfrak{E} \begin{pmatrix} -0,0321 & 0,0226 & -0,0327 & 0,0226 \end{pmatrix} \\ \mathfrak{B}_{44} &= \mathfrak{E} \begin{pmatrix} 1,3981 & 0 & -0,0647 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathfrak{B}_{46} &= -\mathfrak{B}_{64} = \mathfrak{E} \begin{pmatrix} 0 & -0,1942 & 0 & 0,1942 \end{pmatrix} \\ \mathfrak{B}_{55} &= \mathfrak{E} \begin{pmatrix} 1,3473 & 0,4234 & -0,1942 & 0,4234 \end{pmatrix} \\ \mathfrak{B}_{66} &= \mathfrak{E} \begin{pmatrix} 1,1963 & -0,0097 & 0,0306 & -0,0097 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die übrigen Blöcke sind alle Nullmatrizen.

Bei der gegebenen Belastung kann die Spaltenmatrix \mathfrak{b} der Gleichung $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{b}$ folgendermaßen geschrieben werden:

$$\mathfrak{b} = \begin{bmatrix} \mathfrak{b}_1 \\ \mathfrak{b}_2 \\ \mathfrak{b}_3 \\ \mathfrak{b}_4 \\ \mathfrak{b}_5 \\ \mathfrak{b}_6 \end{bmatrix}, \text{ worin } \mathfrak{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -4,16 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathfrak{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3,125 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathfrak{b}_3 = \begin{bmatrix} 6,0031 \\ 1,7281 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathfrak{b}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1,25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathfrak{b}_5 = \begin{bmatrix} -0,7412 \\ 0,6912 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathfrak{b}_6 = \begin{bmatrix} 1,25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ist.}$$

Im Besitz der Matrix \mathfrak{A}^{-1} und der Spaltenmatrix \mathfrak{b} liefert der Zusammenhang $\mathfrak{x} = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{b}$ die Unbekannten:

Normalkräfte:

$$X_{11} = -55 \text{ kg}; X_{21} = -414,9 \text{ kg}; X_{31} = 55 \text{ kg}; X_{41} = -85 \text{ kg}.$$

Lotrechte Querkräfte:

$$X_{12} = -28 \text{ kg}; X_{22} = -280 \text{ kg}; X_{32} = -28 \text{ kg}; X_{42} = 148,3 \text{ kg}.$$

Waagrechte Querkräfte:

$$X_{13} = 242,2 \text{ kg}; X_{23} = 15,6 \text{ kg}; X_{33} = 72 \text{ kg}; X_{43} = -94,4 \text{ kg}.$$

In den lotrechten Ebenen wirken keine Momente.

Die Momente, die in der waagrechten Ebene wirken, sind:

$$X_{15} = -230,5 \text{ mkg}; X_{25} = 112,2 \text{ mkg};$$

$$X_{36} = -38,7 \text{ mkg}; X_{45} = 57,1 \text{ mkg}.$$

Die Torsionsmomente:

$$X_{16} = 39,8 \text{ mkg}; X_{26} = 37 \text{ mkg}; X_{36} = 39,8 \text{ mkg}; X_{46} = 37 \text{ mkg}.$$

Bild 4 zeigt die Momente unter der gegebenen Belastung.

Es ist zu bemerken, daß im Zusammenhang $\mathfrak{x} = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{b}$ nur die Elemente der Spaltenmatrix \mathfrak{b} mit der gegebenen Belastung sich ändern, während die Elemente der Matrix \mathfrak{A}^{-1} ausschließlich von den geometrischen Abmessungen und den Materialkonstanten abhängen, die Matrix \mathfrak{A}^{-1} also für eine gegebene Konstruktion konstant ist. Daraus geht aber hervor, daß je eine Zeile der Matrix \mathfrak{A}^{-1} zur Berechnung von Ordinaten der Einflußlinien der entsprechenden Unbekannten X_{ij} (Kraft oder Moment) geeignet ist. Wird nämlich die X_{ij} entsprechende Zeile der Matrix \mathfrak{A}^{-1} mit der eindeutig bestimmten Spaltenmatrix, die zu jeder beliebig gelegenen Last $P = 1$ gehört, multipliziert, erhält man die Ordinate der Einflußlinie X_{ij} entsprechend der Lage von P .

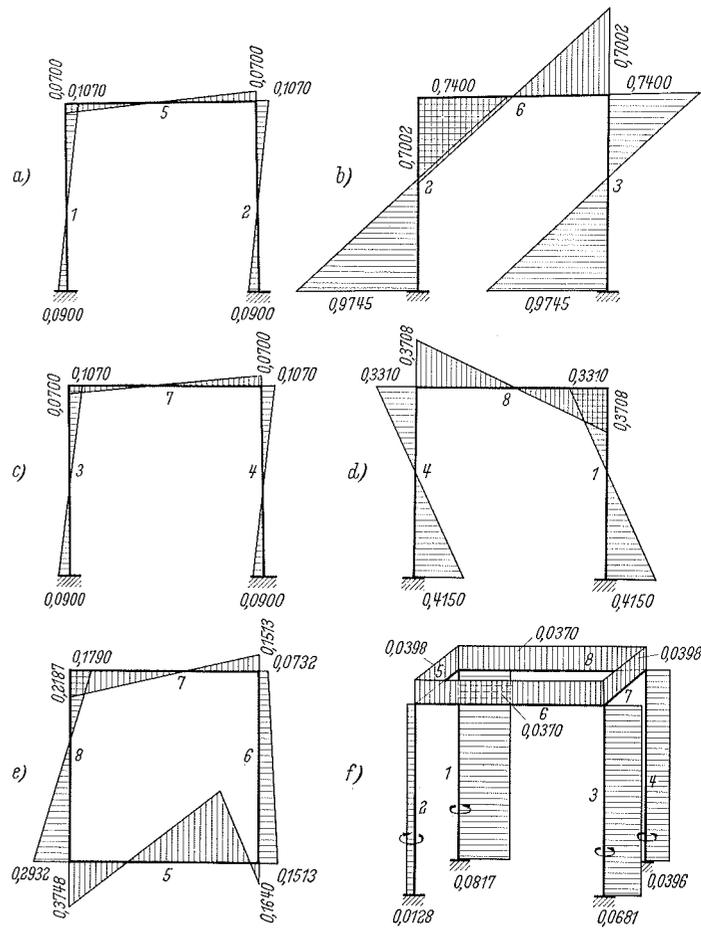


Bild 4. Biege- und Torsionsmomente in den Balken und Stielen des räumlichen Rahmenwerkes

Schrifttum

- [1] Sossenheimer, H.: Rekursive Berechnung von β -Werten für hochgradig statisch unbestimmte Systeme. Ermittlung der β -Matrix unter Verwendung der Theorie der statisch unbestimmten Hauptsysteme. Stahlbau 26 (1957) H. 7, S. 195/202, H. 8, S. 220/25.
- [2] Béres, E., Lovass-Nagy, V., Szabó, J.: Über eine Anwendung der Hypermatrizen bei der Berechnung von räumlichen Fachwerken mit zyklischer Symmetrie. In ungarischer Sprache mit deutscher Zusammenfassung. Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Science, volume I, fasc. 4, pp. 559-576, Budapest 1956.
- [3] Béres, E.: Über eine Anwendung der Hypermatrizen zur Berechnung von räumlichen Stabwerken mit zyklischer Symmetrie. In ungarischer Sprache mit deutscher Zusammenfassung. Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Science, volume I, fasc. 4, pp. 577-592, Budapest 1956.
- [4] Egerváry, E.: On hypermatrices whose blocks are commutable in pairs and their application in latticedynamics. Acta Scientiarum Mathematicarum, Tomus XV, fasc. 3-4, pp. 211-222, Szeged, 1954.
- [5] „Hütte“ Taschenbuch des Ingenieurs. 27. Aufl. Band III S. 23/28. Verlag von W. Ernst & Sohn, Berlin, 1951.

Fließpolyeder des Rechteck- und I-Querschnittes unter der Wirkung von Biegemoment, Normalkraft und Querkraft

Ein Beitrag zum allgemeinen Traglastverfahren für ebene Rahmen

Von K. Klöppel und M. Yamada

DK 624.072.33 Rahmen -- DK 539.374 Molekularphysik

1. Einleitung

Das Traglastverfahren zur Berechnung von Bauwerken wurde durch den Fortschritt der mathematischen Plastizitätstheorie [1], [2] sowie durch die Erkenntnis von zwei Prinzipien über den Sicherheitsgrad [3], [4], das statische und das kinematische Prinzip der Traglastberechnung, stark gefördert. Die Anwendung des Traglastverfahrens auf Rahmenkonstruktionen wurde schon von Greenberg und Prager [5], Symonds und Neal [6] und anderen Forschern gezeigt. Die versuchsmäßige Untersuchung nahmen Baker, Horne und Heyman [7] und andere [8], [9] vor und bestätigten damit die Richtigkeit dieses Verfahrens. Auf die Begrenzung des Momentenausgleiches in Abhängigkeit von den Trag-

werksabmessungen haben Stüssi und Kollbrunner hingewiesen [10] und Klöppel zeigt, daß die Existenzmöglichkeit der für den Momentenausgleich erforderlichen Größe der durch plastische Verformung erzeugten Systemrestmomente nachzuweisen ist [11]. Die bisher veröffentlichten Traglastverfahren sind jedoch nur auf die Analyse der von Biegemomenten beanspruchten Rahmen beschränkt. Nur einige Forscher haben die Fließbedingung unter kombinierten Spannungszuständen, wie sie durch Biegemoment und Querkrafteinfluß [12], [13] oder Biegemoment und Normalkrafteinfluß [14] entstehen, erklärt. In diesem Aufsatz möchten die Verfasser als Grundlage der weiteren Entwicklung des allge-

meinen Traglastverfahrens zuerst die allgemeine Fließbedingung unter Biegemoment-, Normalkraft- und Querkrafteinfluß darstellen und ihre physikalischen Eigenschaften erklären. Dabei sei vorausgesetzt, daß Instabilitäterscheinungen ausgeschlossen sind.

2. Allgemeines

Das Material habe für Zug und Druck gleich ideal-elastisch, idealplastisches Verhalten (Bild 1). Als Fließbedingung soll die Hypothese der konstanten Gestaltänderungsenergie (Mises - Huber - Hencky)

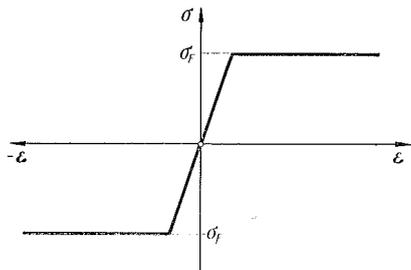


Bild 1. Spannungs-Dehnungslinie eines ideal-elastisch idealplastischen Materials

gelten. Beide Annahmen treffen für Baustahl nur näherungsweise zu. Über die Fließvorgänge der einzelnen Bauteile unter einfachem Spannungszustand, z. B. unter der Einwirkung eines Biegemomentes, wurden schon viele theoretische sowie experimentelle Untersuchungen durchgeführt. Die vorerwähnte Anwendung des Traglastverfahrens [5], [6] auf ebene Rahmen setzt einen einfachen Biegezustand voraus. Bei der Rahmenkonstruktion ist das Biegemoment für das Fließverhalten von großer Bedeutung, weshalb die Anwendung und Entwicklung des Traglastverfahrens für Biegemomentbeanspruchung nahelag. Da jedoch auf eine Rahmenkonstruktion unter allgemeiner Belastung außer Biegemomenten noch Normalkräfte und Querkräfte einwirken, darf man im allgemeinen Falle diese Einflüsse nicht ohne weiteres vernachlässigen. Über das Fließverhalten des Rechteckquerschnittes unter Biegemoment und Querkraft haben schon H o r n e [12] und G r e e n [13] Arbeiten veröffentlicht. Horne hat das Zusammenwirken auf Grund des Gleichgewichtszustandes erörtert und seine Methode führte zu einer unteren Grenze der Traglast. Dagegen hat Green den gleichen Zustand auf Grund des Geschwindigkeitsfeldes untersucht und dies führt zur oberen Grenze der Traglast. Damit sind zwei verschiedene Wege der Traglastuntersuchung aufgezeigt. Diese Tatsache deutet auf den Entwicklungszustand der mathematischen Plastizitätstheorie hin. Über das Fließverhalten des Rechteckquerschnittes unter Biegemoment und Normalkraft hat P r a g e r in seinem Buch [14] berichtet. H o r n e hat in seinem jüngsten Aufsatz [15] eine Näherungsmethode für die Berechnung der Fließgrenze von I-Querschnitten unter Biegemoment, Normalkraft und Querkraft angegeben, die Normal- und Schubspannungsverteilung ist jedoch noch konstant über den ganzen Querschnitt angesetzt. Beide Spannungen sollen die Fließhypothese erfüllen. Die Annahme ist für die praktische Berechnung zweckmäßig, aber doch etwas zu grob. Der kombinierte Zustand der Biege-, Normal- und Querkraft ist auch noch nicht systematisch erörtert.

3. Fließbedingung des Rechteckquerschnittes

In Bild 2 ist die Spannungsverteilung des Rechteckquerschnittes unter Biegemoment M , Normalkraft N und Querkraft Q gezeigt. O ist die Schwerlinie des Querschnittes und O' ist die Nulllinie. $\eta_1 h$

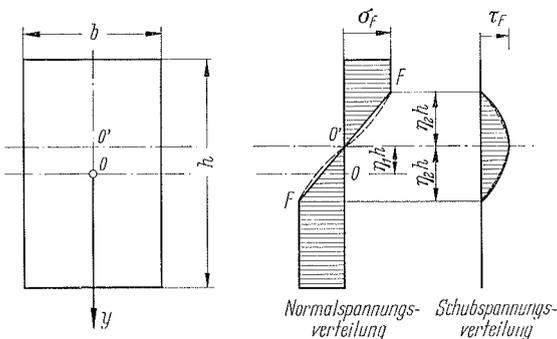


Bild 2. Spannungsverteilung eines Rechteckquerschnittes beim durchplastizierten Zustand

ist der Nulllinienabstand und $\eta_2 h$ ist der Abstand zwischen Nulllinie und der Stelle F , bei der die Normalspannung σ die Fließspannung σ_F erreicht. Zwischen F und der Randfaser gibt es nur Normalspannungen σ_F . Schubspannungen sind nicht vorhanden. Die Normalspannungsverteilung zwischen $O'F$ ist nicht geradlinig, sondern etwas gekrümmt wie in Bild 2 mit gestrichelter Linie eingetragen wurde¹⁾. Wenn auch die Normalspannungsverteilung zwischen $O'F$ geradlinig und proportional zum Abstand von der Nulllinie angenommen ist, so übt diese Annahme fast keinen Einfluß auf die Ergebnisse aus. Unter der Voraussetzung geradliniger Normalspannungsverteilung ergibt sich aus der Gleichgewichtsbedingung:

$$\left. \begin{aligned} N &= \int_{-\eta_1 h}^{\frac{1}{2} h} \sigma(y) \cdot b \cdot dy - \int_{-\frac{1}{2} h}^{-\eta_1 h} \sigma(y) \cdot b \cdot dy, \\ M &= \int_{-\eta_1 h}^{\frac{1}{2} h} \sigma(y) \cdot b \cdot y \cdot dy - \int_{-\frac{1}{2} h}^{-\eta_1 h} \sigma(y) \cdot b \cdot y \cdot dy, \\ Q &= \int_{(\eta_1 - \eta_2) h}^{(\eta_1 + \eta_2) h} \tau(y) \cdot b \cdot dy. \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

Die Fließbedingung lautet:

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_F^2. \dots (2)$$

Bezeichnet M_0 das Durchplastizierungsmoment des Rechteckquerschnittes durch einfachen Momentenangriff, N_0 die Durchplastizierungsnormalkraft und Q_0 die Durchplastizierungsquerkraft dann folgt

$$\left. \begin{aligned} N_0 &= \sigma_F \cdot bh, \\ M_0 &= \sigma_F \cdot \frac{bh^2}{4}, \\ Q_0 &= \frac{\sigma_F}{\sqrt{3}} \cdot bh. \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

(1) $\eta_1 + \eta_2 \leq \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} N &= \int_{-\eta_1 h}^{\frac{1}{2} h} \sigma(y) \cdot b \cdot dy - \int_{-\frac{1}{2} h}^{-\eta_1 h} \sigma(y) \cdot b \cdot dy \\ &= \sigma_F \cdot bh \cdot 2\eta_1 \\ &= N_0 \cdot 2\eta_1, \end{aligned} \dots (4a)$$

$$\begin{aligned} M &= \int_{-\eta_1 h}^{\frac{1}{2} h} \sigma(y) \cdot b \cdot y \cdot dy - \int_{-\frac{1}{2} h}^{-\eta_1 h} \sigma(y) \cdot b \cdot y \cdot dy \\ &= \sigma_F \cdot \frac{bh^2}{4} \cdot \left(1 - 4\eta_1^2 - \frac{4}{3}\eta_2^2\right) \\ &= M_0 \cdot \left(1 - 4\eta_1^2 - \frac{4}{3}\eta_2^2\right), \end{aligned} \dots (4b)$$

$$\begin{aligned} Q &= \int_{(\eta_1 - \eta_2) h}^{(\eta_1 + \eta_2) h} \tau(y) \cdot b \cdot dy \\ &= \int_{(\eta_1 - \eta_2) h}^{(\eta_1 + \eta_2) h} \frac{\sigma_F}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{1 - \left\{\frac{\sigma(y)}{\sigma_F}\right\}^2} \cdot b \cdot dy. \end{aligned}$$

Setzt man die Bezeichnung

$$\frac{\sigma(y)}{\sigma_F} = \frac{y - \eta_1 h}{\eta_2 h} = \eta$$

ein, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} Q &= \int_{-1}^{+1} \frac{\sigma_F}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{1 - \eta^2} \cdot b \cdot \eta_2 h \cdot d\eta \\ &= \frac{\sigma_F}{\sqrt{3}} \cdot b \cdot \eta_2 h \cdot \left[\frac{1}{2} \eta \sqrt{1 - \eta^2} + \frac{1}{2} \arcsin \eta \right]_{-1}^{+1} \\ &= \frac{\sigma_F}{\sqrt{3}} \cdot bh \cdot \eta_2 \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= Q_0 \cdot \eta_2 \cdot \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \dots (4c)$$

¹⁾ Siehe z. B. die Lösung von H o r n e [12] auf Grund der Gleichgewichtsbedingung und der Mohr-Guestschen Hypothese der konstanten größten Schubspannung.

Durch die Elimination der Parameter η_1 und η_2 ergibt sich folgende Fließbedingung (Durchplastizierungsbedingung)

$$-\sigma_F \leq \frac{2M}{bh^2} \pm \sqrt{\left(\frac{2M}{bh^2}\right)^2 + \left(\frac{N}{bh}\right)^2 + \left(\frac{4Q}{\pi bh}\right)^2} \leq \sigma_F, \quad (5)$$

oder mittels des Ausdruckes (3)

$$\left(\frac{M}{M_0}\right) + \left(\frac{N}{N_0}\right)^2 + \frac{16}{3\pi^2} \cdot \left(\frac{Q}{Q_0}\right)^2 \leq 1. \quad \dots \quad (6)$$

Diese Fließbedingung (5) oder (6) gilt nur für $\eta_1 + \eta_2 \leq \frac{1}{2}$. Die Fließbedingung (6) ist die Fläche (I) im Spannungsraum (N, M, Q) wie in Bild 5 gezeigt wird. Hier muß man diese Bedingung (Durchplastizierungsbedingung) des Querschnittes von der Fließanfangsbedingung des Querschnittes klar unterscheiden. Zum Beispiel lauten in der Spannungsfläche (N, M) die Fließanfangsbedingungen

für $\eta_1 \leq \frac{1}{2}$:

$$N = N_0 \cdot \eta_1, \\ M = M_0 \cdot \frac{2}{3} (1 - 2\eta_1^2),$$

das ist $\left(\frac{M}{\frac{2}{3}M_0}\right) + 2\left(\frac{N}{N_0}\right)^2 = 1, \quad \dots \quad (7a)$

für $\eta_1 \geq \frac{1}{2}$:

$$N = N_0 \cdot \frac{2\eta_1}{2\eta_1 + 1}, \\ M = M_0 \cdot \frac{1}{2\eta_1 + 1},$$

das ist $\left(\frac{M}{\frac{2}{3}M_0}\right) + \left(\frac{N}{N_0}\right) = 1, \quad \dots \quad (7b)$

wie in Bild 3 gezeigt ist. Für diese Spannungsfläche ist in der Durchplastizierungsbedingung (6) $Q = 0$ zu setzen und man erhält

$$\left(\frac{M}{M_0}\right) + \left(\frac{N}{N_0}\right)^2 = 1. \quad \dots \quad (8)$$

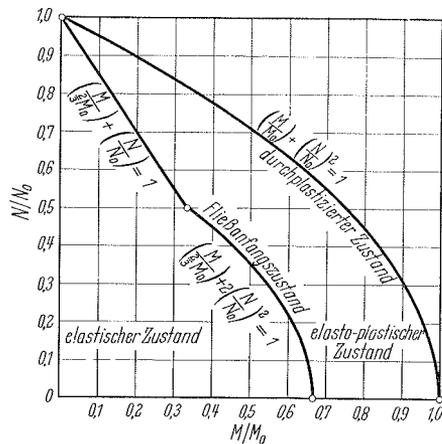


Bild 3. Fließanfangszustand und durchplastizierter Zustand des Rechteckquerschnittes in der Spannungsebene (N, M)

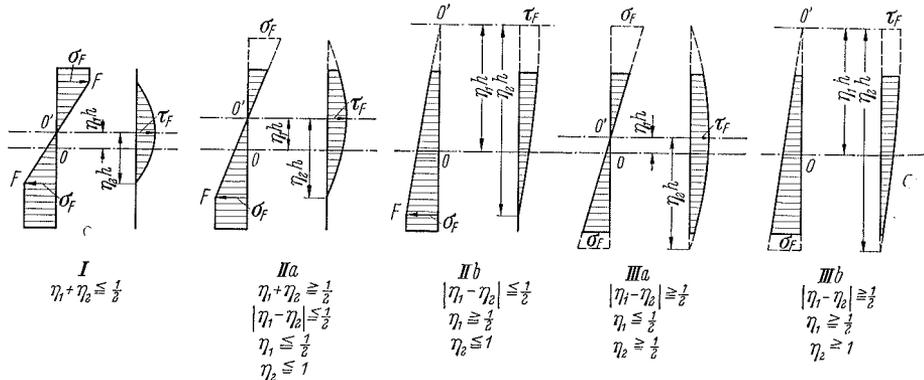


Bild 4. Spannungsverteilung des Rechteckquerschnittes beim durchplastizierten Zustand

$$(II) \quad |\eta_2 - \eta_1| \leq \frac{1}{2}, \quad 0 < \eta_2 \leq 1:$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (IIa): \eta_1 \leq \frac{1}{2}, \quad \eta_1 + \eta_2 \geq \frac{1}{2} \\ (IIb): \eta_1 \geq \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} N = N_0 \cdot \frac{1}{2\eta_2} \left[2\eta_2 - \left(\eta_2 - \eta_1 + \frac{1}{2} \right)^2 \right], \\ M = M_0 \cdot \frac{2}{3\eta_2} \left(\eta_2 - \eta_1 + \frac{1}{2} \right)^2 \cdot (1 - \eta_2 + \eta_1), \\ Q = Q_0 \cdot \eta_2 \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1 - \eta_1}{\eta_2} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{1 - \eta_1}{\eta_2} \right)^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot \arcsin \left(\frac{1 - \eta_1}{\eta_2} \right) \right]; \end{array} \right\} \quad (9)$$

$$(III) \quad |\eta_2 - \eta_1| \geq \frac{1}{2}, \quad \eta_2 \geq \frac{1}{2}:$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (IIIa): \eta_1 \leq \frac{1}{2} \\ (IIIb): \eta_1 \geq \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} N = N_0 \cdot \frac{\eta_1}{\eta_2}, \\ M = M_0 \cdot \frac{1}{3\eta_2}, \\ Q = Q_0 \cdot \eta_2 \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1 - \eta_1}{\eta_2} \right) \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1 - \eta_1}{\eta_2} \right)^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1 + \eta_1}{\eta_2} \right) \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1 - \eta_1}{\eta_2} \right)^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{1 - \eta_1}{\eta_2} \right) + \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{1 + \eta_1}{\eta_2} \right) \right]. \end{array} \right\} \quad \dots \quad (10)$$

Diese durch die Formeln (4), (9) und (10) gezeigten drei Grenzflächen sind in Bild 5 und 6 dargestellt. Diese Grenzfläche im Spannungsraum (M, N, Q) ist die Durchplastizierungsbedingung und wird Fließpolyeder genannt.

Wenn der Spannungszustand sich zwischen beiden Kurven (7) und (8) befindet, ist der Querschnitt teilweise plastiziert, d. h. im elasto-plastischem Zustand. Da die Verfahren zur Ermittlung der Traglast für Rahmen (nicht für einzelne Bauteile) auf Grund der Durchplastizierungsbedingung des einzelnen Bauteils aufgestellt werden müssen, wird in diesem Aufsatz auch hauptsächlich der Durchplastizierungszustand erörtert. Bei diesem Zustand ist die Spannungsverteilung nach Bild 4 vorausgesetzt. Am Rand sollten die Schubspannungen eigentlich theoretisch 0 sein; hier ist die Schubspannungsverteilung so angenommen, daß die Schubspannungen am Rande sehr steil angewachsen und mit den Normalspannungen die Fließhypothese erfüllt ist.

4. Die Fließbedingung des I-Querschnittes unter Biegemoment, Normalkraft und Querkraft

Die Spannungsverteilung des I-Querschnittes unter Biegemoment M , Normalkraft N und Querkraft Q ist in Bild 7 gezeigt. Mit den Parametern α und β ist die Dicke von Steg und Flansch festgelegt. Bei dem I-Querschnitt nehmen wir an, daß die Querkraft nur durch den Steg übertragen wird. Mit N_0', M_0' und Q_0' bezeichnen wir die Durchplastizierungsnormalkraft, das Durchplastizierungsmoment und die Durchplastizierungsquerkraft eines I-Querschnittes mit den Abmessungen $h \times b$ ($\alpha h, \beta b$) wie in Bild 7 dargestellt. Hier bedeuten N_0, M_0 und Q_0 auch die Durchplastizierungsnormalkraft,

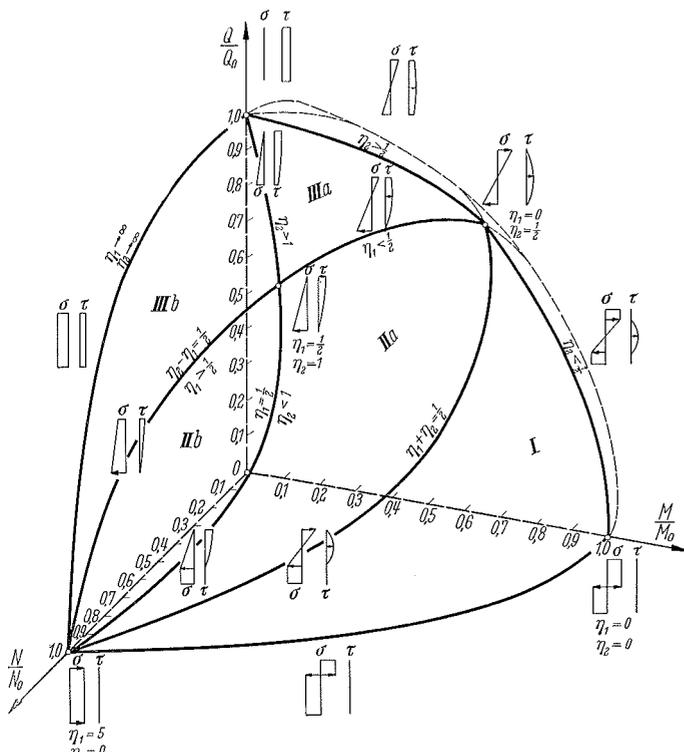


Bild 5. Fließpolyeder des Rechteckquerschnittes im Spannungsraum (M, N, Q)

$$\begin{aligned}
 Q &= \int_{(\eta_1 - \eta_2)h}^{(\eta_1 + \eta_2)h} \tau(y) \cdot \beta b \cdot dy \\
 &= \frac{\sigma_F}{\sqrt{3}} \cdot bh \cdot \eta_2 \cdot \beta \cdot \frac{\pi}{2} \\
 &= Q_0 \cdot \eta_2 \cdot \beta \cdot \frac{\pi}{2} \\
 &= Q_0' \cdot \eta_2 \cdot \frac{\pi}{2}
 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (14c)$$

Durch die Elimination der Parameter η_1 und η_2 aus (14a), (14b) und (14c) ergibt sich folgende Grenzfläche:

$$\begin{aligned}
 (I) \quad & \left(\frac{M}{M_0} \right) + \frac{1}{\beta} \left(\frac{N}{N_0} \right)^2 + \frac{16}{3\pi^2\beta} \left(\frac{Q}{Q_0} \right)^2 \\
 &= \{ 1 - (1 - 2\alpha)^2 (1 - \beta) \} \dots \dots \dots (15)
 \end{aligned}$$

das Durchplastizierungsmoment und die Durchplastizierungsquerkraft eines entsprechenden Rechteckquerschnittes $h \times b$.

$$\left. \begin{aligned}
 N_0' &= N_0 \cdot \{ 1 - (1 - 2\alpha) \cdot (1 - \beta) \}, \\
 M_0' &= M_0 \cdot \{ 1 - (1 - 2\alpha)^2 \cdot (1 - \beta) \}, \\
 Q_0' &= Q_0 \cdot \beta \cdot (1 - 2\alpha),
 \end{aligned} \right\} (13)$$

mit $N_0 = \sigma_F \cdot bh$,
 $M_0 = \sigma_F \cdot \frac{bh^2}{4}$,
 $Q_0 = \frac{\sigma_F}{\sqrt{3}} \cdot bh$.

(I) $\eta_1 + \eta_2 \leq \frac{1}{2} - \alpha$:

$$\begin{aligned}
 N &= \int_{-\eta_1 h}^{\frac{1}{2}h} \sigma(y) \cdot b(y) \cdot dy - \int_{-\frac{1}{2}h}^{-\eta_1 h} \sigma(y) \cdot b(y) \cdot dy \\
 &= \sigma_F \cdot bh \cdot 2\eta_1 \cdot \beta \\
 &= N_0 \cdot 2\eta_1 \cdot \beta \\
 &= N_0' \cdot \left[1 - \frac{2\alpha + \beta(1 - 2\alpha - 2\eta_1)}{1 - (1 - 2\alpha)(1 - \beta)} \right];
 \end{aligned} \quad \dots \dots (14a)$$

$$\begin{aligned}
 M &= \int_{-\eta_1 h}^{\frac{1}{2}h} \sigma(y) \cdot b(y) \cdot y \cdot dy - \int_{-\frac{1}{2}h}^{-\eta_1 h} \sigma(y) \cdot b(y) \cdot y \cdot dy \\
 &= \sigma_F \cdot \frac{bh^2}{4} \cdot \left[\left(1 - 4\eta_1^2 - \frac{4}{3}\eta_2^2 \right) - (1 - \beta) \cdot \left\{ (1 - 2\alpha)^2 - 4\eta_1^2 - \frac{4}{3}\eta_2^2 \right\} \right] \\
 &= M_0 \cdot \left[\left(1 - 4\eta_1^2 - \frac{4}{3}\eta_2^2 \right) - (1 - \beta) \cdot \left\{ (1 - 2\alpha)^2 - 4\eta_1^2 - \frac{4}{3}\eta_2^2 \right\} \right] \\
 &= M_0' \cdot \left[1 - \frac{\beta \left(4\eta_1^2 + \frac{4}{3}\eta_2^2 \right)}{1 - (1 - 2\alpha)^2 (1 - \beta)} \right];
 \end{aligned} \quad \dots \dots (14b)$$

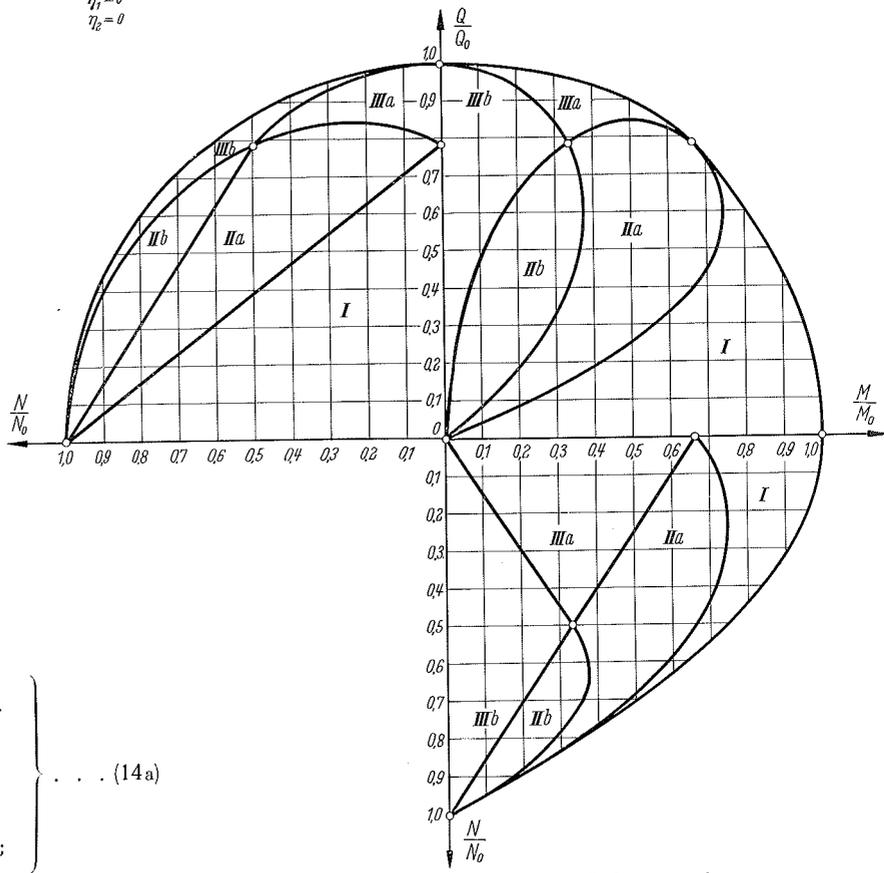


Bild 6. Fließpolyeder des Rechteckquerschnittes

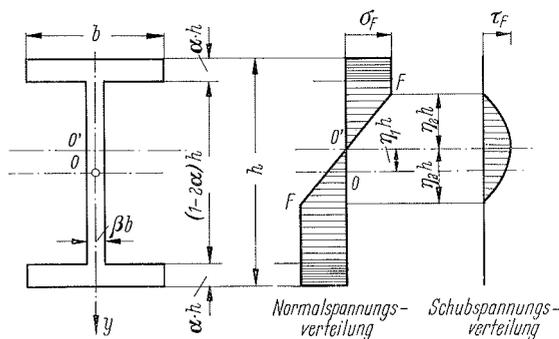


Bild 7. Spannungsverteilung des I-Querschnittes beim durchplastizierten Zustand

$$\begin{aligned}
 \text{(II)} \quad \frac{1}{2} - \alpha \leq \eta_1 + \eta_2 \leq \frac{1}{2}, \quad \eta_2 \neq 0: & \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(II a): } \eta_1 \leq \frac{1}{2} - \alpha, \quad \eta_2 - \eta_1 \leq \frac{1}{2} - \alpha \\ \text{(II b): } \frac{1}{2} - \alpha \leq \eta_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} \end{array} \right. \\
 N = N_0 \cdot \left[2\eta_1 - (1 - \beta) \left\{ (1 - 2\alpha) - \frac{1}{2\eta_2} \left(\frac{1}{2} - \alpha - \eta_1 + \eta_2 \right)^2 \right\} \right], \\
 M = M_0 \cdot \left[\left(1 - 4\eta_1^3 - \frac{4}{3}\eta_2^2 \right) - (1 - \beta) \frac{2}{3\eta_2} \left(\frac{1}{2} - \alpha - \eta_1 + \eta_2 \right)^2 \cdot (1 - 2\alpha + \eta_1 - \eta_2) \right], \\
 Q = Q_0 \cdot \eta_2 \cdot \beta \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) - \eta_1}{\eta_2} \right\} \sqrt{1 - \left\{ \frac{\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) - \eta_1}{\eta_2} \right\}^2} + \frac{1}{2} \arcsin \left\{ \frac{\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) - \eta_1}{\eta_2} \right\} \right]. \quad \dots \dots \dots (16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(III)} \quad \eta_2 - \eta_1 \leq \frac{1}{2} - \alpha, \quad \eta_2 \neq 0: & \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(III a): } \eta_1 \leq \frac{1}{2} - \alpha, \quad \eta_1 + \eta_2 \geq \frac{1}{2} \\ \text{(III b): } \frac{1}{2} - \alpha \leq \eta_1 \leq \frac{1}{2}, \quad \eta_1 + \eta_2 \geq \frac{1}{2} \\ \text{(III c): } \eta_1 \geq \frac{1}{2} \end{array} \right. \\
 N = N_0 \cdot \frac{1}{2\eta_2} \left[\left\{ 2\eta_2 - \left(\frac{1}{2} - \eta_1 + \eta_2 \right)^2 \right\} - (1 - \beta) \left\{ (1 - 2\alpha) \cdot 2\eta_2 - \left(\frac{1}{2} - \alpha - \eta_1 + \eta_2 \right)^2 \right\} \right], \\
 M = M_0 \cdot \frac{2}{3\eta_2} \left[\left(\frac{1}{2} - \eta_1 + \eta_2 \right)^2 (1 + \eta_1 - \eta_2) - (1 - \beta) \left(\frac{1}{2} - \alpha - \eta_1 + \eta_2 \right)^2 (1 - 2\alpha + \eta_1 - \eta_2) \right], \\
 Q = Q_0 \cdot \eta_2 \cdot \beta \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) - \eta_1}{\eta_2} \right\} \sqrt{1 - \left\{ \frac{\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) - \eta_1}{\eta_2} \right\}^2} + \frac{1}{2} \arcsin \left\{ \frac{\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) - \eta_1}{\eta_2} \right\} \right]. \quad \dots \dots \dots (17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(IV)} \quad \frac{1}{2} - \alpha \leq \eta_1 + \eta_2 \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} - \alpha \leq \eta_2 - \eta_1 \leq \frac{1}{2}, \quad \eta_2 \neq 0: \\
 N = N_0 \cdot \frac{\eta_1}{\eta_2} \cdot [2\eta_2 - (1 - 2\alpha)(1 - \beta)], \\
 M = M_0 \cdot \frac{1}{3\eta_2} \cdot \left[2 \left(\frac{1}{2} - \eta_1 + \eta_2 \right)^2 (1 + \eta_1 - \eta_2) - 2 \left(\frac{1}{2} - \eta_1 - \eta_2 \right) (1 + \eta_1 + \eta_2) - (1 - 2\alpha)^3 (1 - \beta) \right], \\
 Q = Q_0 \cdot \eta_2 \cdot \beta \cdot \left[\frac{1}{2} \left\{ \frac{\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) + \eta_1}{\eta_2} \right\} \sqrt{1 - \left\{ \frac{\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) + \eta_1}{\eta_2} \right\}^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) - \eta_1}{\eta_2} \right\} \sqrt{1 - \left\{ \frac{\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) - \eta_1}{\eta_2} \right\}^2} \right. \\
 \left. + \frac{1}{2} \arcsin \left\{ \frac{\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) + \eta_1}{\eta_2} \right\} + \frac{1}{2} \arcsin \left\{ \frac{\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) - \eta_1}{\eta_2} \right\} \right]. \quad \dots \dots \dots (18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(V)} \quad \frac{1}{2} - \alpha \leq \eta_2 - \eta_1 \leq \frac{1}{2}, \quad \eta_2 \neq 0: & \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(V a): } \eta_1 \leq \frac{1}{2} - \alpha, \quad \eta_1 + \eta_2 \geq \frac{1}{2} \\ \text{(V b): } \frac{1}{2} - \alpha \leq \eta_1 \leq \frac{1}{2} \\ \text{(V c): } \eta_1 \geq \frac{1}{2} \end{array} \right. \\
 N = N_0 \cdot \frac{1}{2\eta_2} \cdot \left[\left\{ 2\eta_2 - \left(\frac{1}{2} - \eta_1 + \eta_2 \right)^2 \right\} - (1 - 2\alpha)(1 - \beta) \cdot 2\eta_1 \right], \\
 M = M_0 \cdot \frac{1}{3\eta_2} \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \eta_1 + \eta_2 \right)^2 (1 + \eta_1 - \eta_2) - (1 - 2\alpha)^3 (1 - \beta) \right], \\
 Q = Q_0 \cdot \eta_2 \cdot \beta \cdot \left[\frac{1}{2} \left\{ \frac{\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) + \eta_1}{\eta_2} \right\} \sqrt{1 - \left\{ \frac{\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) + \eta_1}{\eta_2} \right\}^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) - \eta_1}{\eta_2} \right\} \sqrt{1 - \left\{ \frac{\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) - \eta_1}{\eta_2} \right\}^2} \right. \\
 \left. + \frac{1}{2} \arcsin \left\{ \frac{\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) + \eta_1}{\eta_2} \right\} + \frac{1}{2} \arcsin \left\{ \frac{\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) - \eta_1}{\eta_2} \right\} \right]. \quad \dots \dots \dots (19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(VI)} \quad \eta_2 - \eta_1 \geq \frac{1}{2}, \quad \eta_2 \neq 0: & \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(VI a): } \eta_1 \leq \frac{1}{2} - \alpha \\ \text{(VI b): } \frac{1}{2} - \alpha \leq \eta_1 \leq \frac{1}{2} \\ \text{(VI c): } \eta_1 \geq \frac{1}{2} \end{array} \right. \\
 N = N_0 \cdot \frac{\eta_1}{\eta_2} \cdot \{ 1 - (1 - 2\alpha)(1 - \beta) \}, \\
 M = M_0 \cdot \frac{1}{3\eta_2} \cdot \{ 1 - (1 - 2\alpha)^3 (1 - \beta) \}, \\
 Q = Q_0 \cdot \eta_2 \cdot \beta \cdot \left[\frac{1}{2} \left\{ \frac{\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) + \eta_1}{\eta_2} \right\} \sqrt{1 - \left\{ \frac{\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) + \eta_1}{\eta_2} \right\}^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) - \eta_1}{\eta_2} \right\} \sqrt{1 - \left\{ \frac{\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) - \eta_1}{\eta_2} \right\}^2} \right. \\
 \left. + \frac{1}{2} \arcsin \left\{ \frac{\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) + \eta_1}{\eta_2} \right\} + \frac{1}{2} \arcsin \left\{ \frac{\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) - \eta_1}{\eta_2} \right\} \right]. \quad \dots \dots \dots (20)
 \end{aligned}$$

In Bild 8 werden Spannungsverteilungen der einzelnen Fälle gezeigt. Als Werte der Parameter α und β , die die Größe des I-Querschnittes zeigen, z. B. I-Stahl nach DIN 1025 Blatt 1, bekommen wir für I-40 ($h = 400, b = 155, d = 14,4, t = 21,6$) $\alpha = \frac{t}{h} = 0,054, \beta = \frac{d}{b} = 0,093$. In Bild 9 und 10 sind die Grenzflächen, die mit der Formel (14) oder (15), (16), (17), (18), (19) und (20) erfaßt werden, für $\alpha = 0,05, \beta = 0,10$ dargestellt. Wie in Bild 9 zu sehen ist (vgl. auch Bild 10), wird das Fließpolyeder eines I-Querschnittes mit sechs gekrümmten Flächen konstruiert. Wenn in diesen Formeln (14) bis (20) $\alpha = 0, \beta = 1$ gesetzt wird, dann erhält man die Formeln des Rechteckquerschnittes (4), (9), (10).

5. Die physikalischen Eigenschaften des Fließpolyeders

Im allgemeinen wird die Fließbedingung als eine stetig differenzierbare Beziehung der Spannungen (M, N, Q) wie folgt ausgedrückt:

$$\Phi(M, N, Q) = K \quad (K = \text{konstant}). \quad (21)$$

Diese Formel stellt eine geschlossene konvexe Fläche im Spannungsraum (N, N, Q) dar und wird Fließpolyeder genannt. Dadurch müssen unendlich kleine Änderungen dM, dN, dQ dieses Zustandes folgende Beziehung erfüllen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial M} \cdot dM + \frac{\partial \Phi}{\partial N} \cdot dN + \frac{\partial \Phi}{\partial Q} \cdot dQ = 0. \quad (22)$$

Das Hill'sche Gesetz [1], [2], [16] und [17] der plastischen Arbeit lautet: „Unter allen statisch zulässigen Spannungsverteilungen erfordert die wirklich vorhandene ein Maximum äußerer Anstrengung, um das Fließen aufrechtzuerhalten“ — Maximum des plastischen Widerstandes —. Diesen Satz kann man durch die Beziehung

$$\dot{\varphi} \cdot dM + \dot{\varepsilon} \cdot dN + \dot{\gamma} \cdot dQ = 0 \quad (23)$$

ausdrücken. Hier sind $\dot{\varphi}, \dot{\varepsilon}$ und $\dot{\gamma}$ Dreh-, Normal- und Schubverzerrungsgeschwindigkeit. Aus den beiden Gleichungen (22) und (23) ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi} &= \lambda \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial M}, \\ \dot{\varepsilon} &= \lambda \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial N}, \\ \dot{\gamma} &= \lambda \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial Q}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (24)$$

λ ist ein beliebiger Proportionalitätsfaktor. Diese Gleichung (24) stellt die Beziehung zwischen Spannungen und Verzerrungsgeschwindigkeiten bei der plastischen Verformung dar und wird Fließgesetz genannt. Die Verknüpfung der Fließbedingung (21) mit dem Fließgesetz (24) ist als Mises'sche Theorie des plastischen Potentials [18] bekannt. Die Geschwindigkeit der plastischen Arbeit eines Querschnittes \dot{A} beim plastischen Zustand ist

$$\dot{A} = M \cdot \dot{\varphi} + N \cdot \dot{\varepsilon} + Q \cdot \dot{\gamma}. \quad (25)$$

Aus Gleichung (24) folgt:

$$\dot{A} = \lambda \left[M \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial M} + N \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial N} + Q \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial Q} \right] > 0 \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} &= \lambda \cdot \Phi \\ &= \lambda \cdot K. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (27)$$

Ein Punkt $P \left(\frac{M}{M_0}, \frac{N}{N_0}, \frac{Q}{Q_0} \right)$ auf dem Fließpolyeder $\Phi = K$ im Spannungsraum (M, N, Q) zeigt, daß durch eine Kombination der äußeren Kräfte (M_p, N_p, Q_p) der ganze Querschnitt durchplastiziert wird (s. Bild 11). Der Vektor \vec{OP} bedeutet einen durchplastizierten Spannungszustand. Am Punkt P zeichnen wir einen Normalvektor \vec{PP}' auf den Fließpolyeder. Wie aus der Formel (24) er-

sichtlich ist, sind die Komponenten des Vektors \vec{PP}' nach den Richtungen (M, N, Q) proportional zu den Verzerrungsgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}, \dot{\varepsilon}, \dot{\gamma}$. Der Normalvektor \vec{PP}' ist ein Verzerrungsgeschwindigkeitsvektor, wenn der Spannungszustand durch den Vektor OP ausgedrückt wird. Dann wird aus der Gleichung (25) ersichtlich,

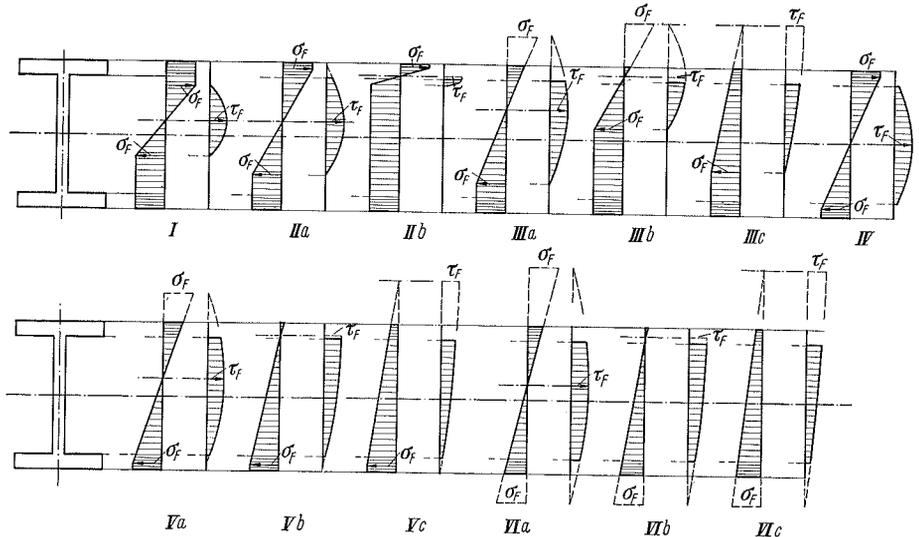


Bild 8. Spannungsverteilung des I-Querschnittes beim durchplastizierten Zustand

daß das innere Produkt des Vektors \vec{OP} und des Vektors \vec{PP}' eine plastische Arbeit ist. Sind Biegemoment, Normalkraft und Querkraft eines Querschnittes im elastischen Zustand

$$\kappa M_P, \kappa N_P, \kappa Q_P \quad (0 < \kappa < \kappa_A \leq 1),$$

so wachsen diese Spannungen entlang der Gerade OP , wenn die Belastungen proportional ansteigen. Wenn der Vektor \vec{OP} den Fließanfangspolyeder $\Phi_A = K_A$ erreicht (Bild 11), d. i. \vec{OP}_A ($\kappa_A M_P, \kappa_A N_P, \kappa_A Q_P$), so beginnt die Plastizierung des Querschnittes. Wenn das Kombinationsverhältnis des Biegemomentes, der Normalkraft und der Querkraft konstant bleibt (äußerlich bestimmt), wächst der Spannungsvektor noch weiter entlang OP . Schließlich erreicht er den Fließpolyeder $\Phi = K$ ($\kappa = 1$). Dann ist der ganze Querschnitt durchplastiziert und der Spannungszustand

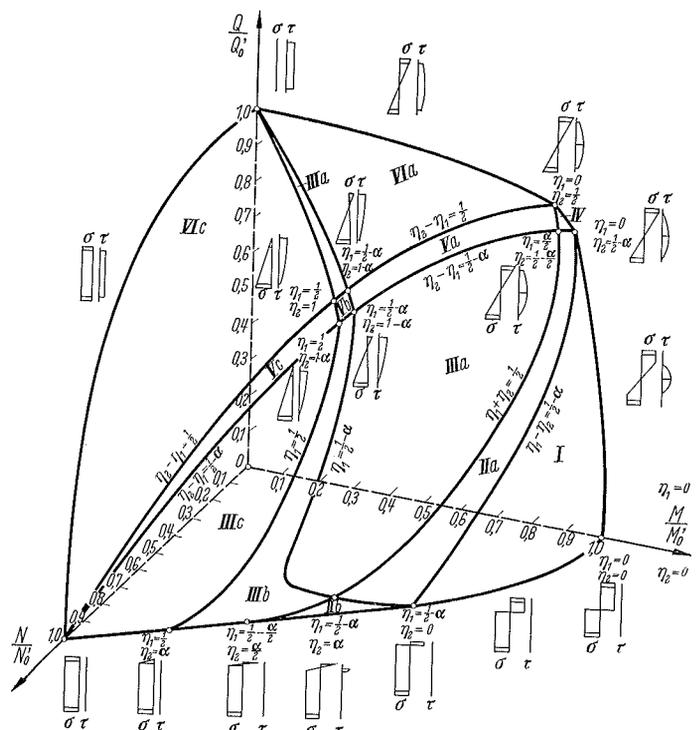


Bild 9. Fließpolyeder des I-Querschnittes im Spannungsraum (M, N, Q)

(Vektor \vec{OP}) kann nicht aus dem Fließpolyeder wachsen. Wenn der Spannungsvektor im Raum zwischen $\Phi_A = K_A$ und $\Phi = K$ bleibt ($\alpha_A < \alpha < 1$), befindet sich der Querschnitt im elasto-plastischen Zustand (teilweise plastiziert).

6. Schlussbemerkung

Als den Ausgangspunkt des allgemeinen Traglastverfahrens für ebene Rahmen wurden Fließpolyeder des Rechteck- und I-Querschnittes aus ideal-elastisch, ideal-plastischem Material unter Biegemoment, Normalkraft und Querkraft gezeigt und deren physikalische Eigenschaften erörtert. Aus diesen Fließpolyedern kann man die Durchplastizierungszustände im allgemeinen Fall genau ersehen und für gegebene Spannungszustände die richtige Spannungslage ermitteln. Gleichzeitig kann man die Frage beantworten, ob der Durchplastizierungszustand schon erreicht ist. Den Sicherheitsgrad des einzelnen Stabes kann man daraus berechnen. Für die Anwendung des modernen Traglastverfahrens für ebene Rahmen kann man auf Grund dieser Fließpolyeder näherungsweise ein Fließpolyeder, das für die praktischen Berechnungen in zweckmäßige mathematische Formeln zu fassen ist, einführen, und somit ein Näherungsverfahren entwickeln.

Schrifttum

- [1] Hill, R.: The mathematical theory of plasticity, Clarendon Press, Oxford, 1950.
- [2] Prager, W., Hodge, P. G.: Theory of Perfectly plastic solids, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1951.
- [3] Drucker, D. C., Greenberg, H. J., Prager, W.: The safety factor of an elastic-plastic body in plane strain, J. Appl. Mech., Vol. 18, No. 4 (Dec. 1951) S. 371/78.
- [4] Symonds, P. S., Prager, W.: Elastic-plastic analysis of structures subjected to loads varying arbitrarily between prescribed limits, J. Appl. Mech., Vol. 17, No. 3 (Sept. 1950) S. 315/23.
- [5] Greenberg, H. J., Prager, W.: On the limit design of beams and frames, Proc. Amer. Soc. Civil Engr., Vol. 77, No. 59 (Feb. 1951).
- [6] Symonds, P. S., Neal, B. G.: Recent progress in the methods of structural analysis, J. Franklin Inst., Vol. 252, No. 5 (Nov. 1951) S. 383/408; No. 6 (Dec. 1951) S. 469/92.
- [7] Baker, J. F., Horne, M. R., Heyman, J.: The steel skeleton, Vol. 2: Plastic Behaviour and Design, Cambridge University Press, Cambridge, 1956.
- [8] Nelson, H. M., Wright, D. T., Dolphin, J. W.: Demonstrations of plastic behaviour of steel frames, Proc. Amer. Soc. Civil Engr., Vol. 83, No. EM 4 (Oct. 1957).
- [9] Beedle, L. S.: Plastic strength of steel frames, Trans. Amer. Soc. Civil Engr., Vol. 122, 1957, S. 1139.
- [10] Stüssi, F., Kollbrunner, C.: Beitrag zum Traglastverfahren. Bau-technik 13, (1935) H. 21 S. 264.

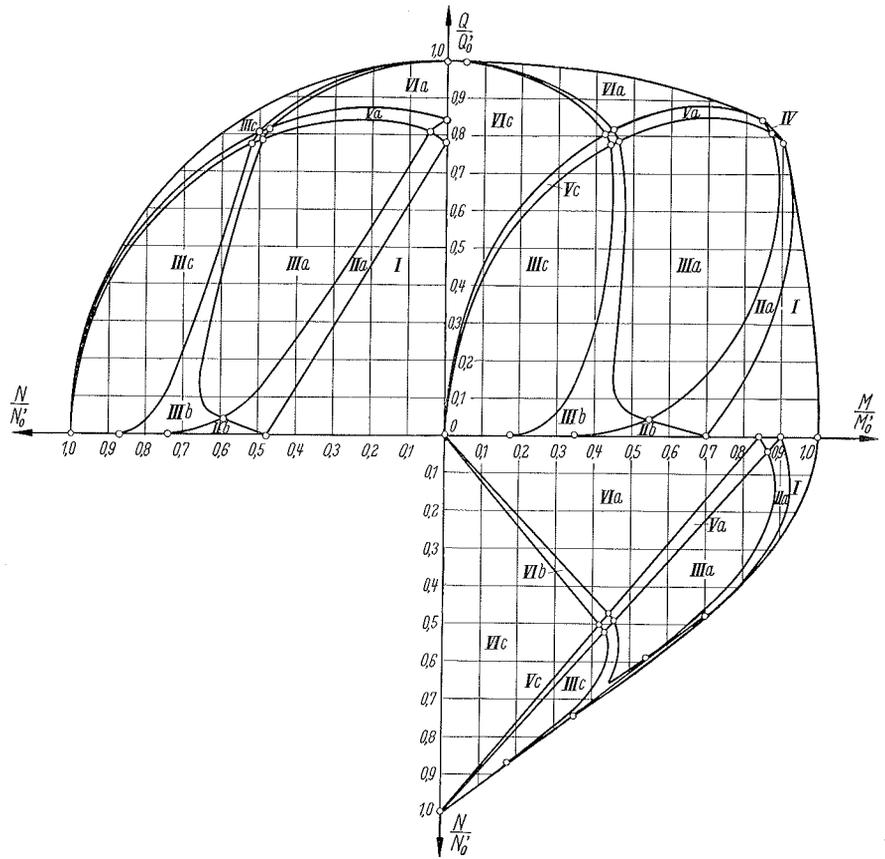


Bild 10. Fließpolyeder des I-Querschnittes

- [11] Klöppel, K.: Über zulässige Spannungen im Stahlbau. Veröffentlichungen des Deutschen Stahlbau-Verbandes, H. 6 S. 51, Köln 1958, Stahlbau-Verlags-GmbH.
- [12] Horne, M. R.: The plastic theory of bending of mild steel beams with particular reference to the effect of shear forces, Proc. Roy. Soc., A, Vol. 207, 1951.
- [13] Green, A. P.: A theory of the plastic yielding due to bending of cantilevers and fixed-ended beams, Part I (1954) No. 1, S. 1/15, Part II (1955) No. 2, S. 143/55, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 3.
- [14] Prager, W.: Probleme der Plastizitätstheorie, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1955.
- [15] Horne, M. R.: The full plastic moments of sections subjected to shear forces and axial load, British Weld. J., Vol. 5, No. 4, April 1958.
- [16] Hill, R.: A comparative study of some variational principle in the theory of plasticity, J. Appl. Mech. Mar. 1950.
- [17] Hill, R.: A variational principle of maximum plastic work in classical plasticity, Q. J. of Mech. and Appl. Math. 1, Vol. 1 (March 1948).
- [18] v. Mises, R.: Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen, Z. A. M. M., 8 (1928) H. 3 S. 161/85.

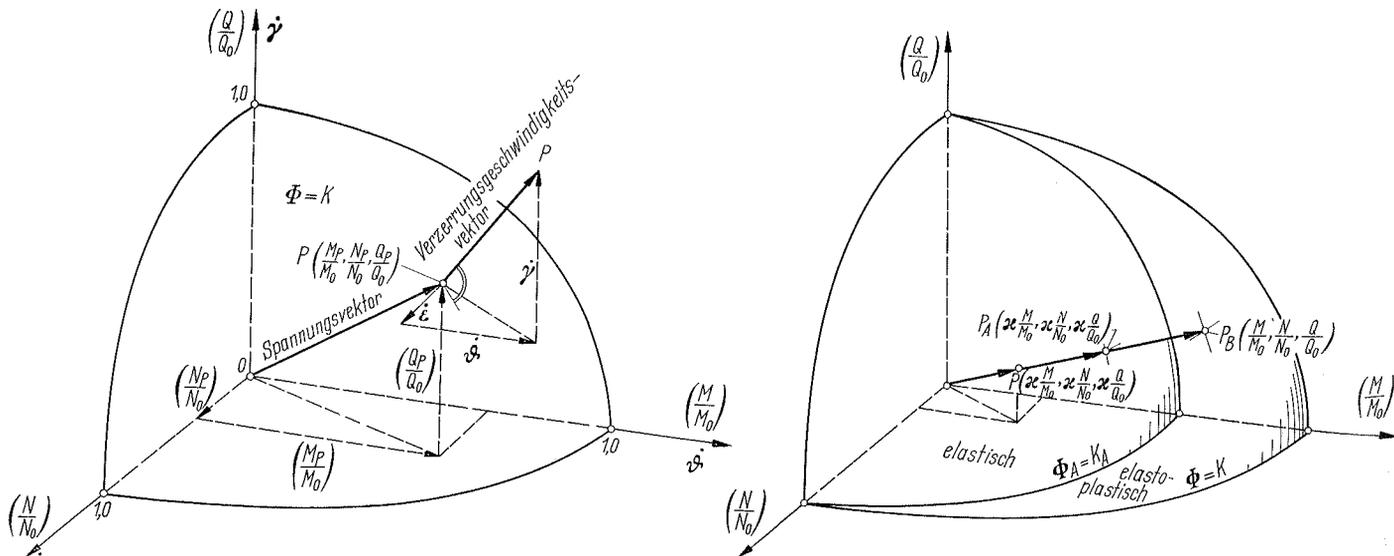


Bild 11. Physikalische Eigenschaften des Fließpolyeders