

Eine Erweiterung der technischen Biegelehre für die Berechnung biegesteifer prismatischer Faltwerke¹⁾

DK 624.074.5 : 624.072.1 : 624.01

Von R. Schardt, Darmstadt

I. Einleitung

I.1. Allgemeines

Die gebräuchlichen Tragwerke lassen sich entsprechend ihrer Formgebung in zwei Gruppen einteilen. Zur ersten gehören die Fachwerke, Balken und Rahmentragwerke. Diese werden unabhängig davon, ob sie als Gesamttragwerk ein ebenes oder räumliches Bild zeigen, mit den eindimensionalen Mitteln der sogenannten Stabstatik behandelt. Dabei bildet die Stabachse die Koordinate zu den Schnitt- und Verformungsgrößen. Zur zweiten Gruppe gehören die ebenen Scheiben, die Platten und die einfach und doppelt gekrümmten Schalen. Auf sie werden die zweidimensionalen Methoden der Flächentragwerke angewandt. Die sowohl bei den Stabwerken als auch bei den Flächentragwerken in Wirklichkeit vorhandene dreidimensionale Spannungsverteilung wird aber durch diese vereinfachte Darstellung nicht etwa außer acht gelassen, vielmehr wird in den eliminierten Richtungen der Spannungsverteilung ein Gesetz vorgeschrieben, das innerhalb des Anwendungsbereichs der einzelnen Verfahren die Verhältnisse genau genug erfaßt. Die nach Verteilungsformen zusammengefaßten Spannungen nennt man in der Stabstatik Schnittgrößen, in der Statik der Flächentragwerke Spannungsergebnisse. Es ist ein besonders günstiger Umstand, daß man hierbei in der Regel mit linearen Funktionen auskommt. Was für die Spannungen gilt, das gilt ebenso auch für die Verformungen. Die Verschiebungen und Verzerrungen eines Tragwerks lassen sich auch mit den dimensionsreduzierten Verfahren in ihrer räumlichen Verteilung eindeutig angeben.

Eine Zwischenstellung zwischen diesen beiden Gruppen behaupten die Faltwerke. Solange für die Elemente des Faltwerks die Voraussetzungen der Stabstatik gegeben sind, das gilt für alle nicht zu kurzen prismatischen Faltwerke, gibt es klassische Verfahren zu ihrer Berechnung. Die ersten Arbeiten über Faltwerksberechnung erschienen 1930, und zwar bringen, offenbar unabhängig voneinander, E h l e r s [1] und C r a e m e r [2] eine Berechnungsmethode für Gelenkfaltwerke auf der Grundlage der „Drei-Schübe-Gleichungen“. Diese erhält man als Gleichungssystem für die unbekanntes Schubflüsse mit der Bedingung, daß an den Kanten die Längsdehnungen der angrenzenden Scheiben gleich sein müssen. Im selben Jahr wird durch Zuschriften darauf aufmerksam gemacht, daß diese Methode nur sehr beschränkte Gültigkeit hat, weil sie weder die Biegespannungen im Querschnitt aus der gegenseitigen Verdrehung der Scheiben noch den Einfluß der „Querbiegung“ auf die Verteilung der Längsspannungen erfaßt. Darauf erschienen im Jahre 1932 (wieder gleichzeitig) die Arbeiten von G r ü n i n g [3] und G r u b e r [4], die die Querbiegung mit erfassen. Beide nehmen als statisches Hauptsystem das Gelenkfaltwerk und machen die Winkeländerungen an den Kanten durch Kantenmomente zu Null. Diese Momente sind entlang den Kanten veränderlich und die Funktion ist nicht bekannt. G r ü n i n g führt sie in Form von Potenz-

reihen ein mit m Parametern für jede Kante und kann dadurch die Elastizitätsgleichungen für die überzähligen Kantenmomente an m Querschnitten des Faltwerks erfüllen. Er erhält ein Gleichungssystem mit $(n-3) \cdot m$ Unbekannten, wenn n die Anzahl der Scheiben ist.

G r u b e r entwickelt die äußeren Lasten in Sinusreihen und erhält durch die Affinität zwischen Last und Verformung unabhängige Gleichungssysteme mit $(n-3)$ Unbekannten für jedes Reihenglied. Das geht allerdings nur, wenn die einzelnen Ansätze die Randbedingungen befriedigen.

In der Arbeit von G r ü n i n g wurde mit Vorbehalt versucht, Angaben über den Anwendungsbereich der Theorie zu gewinnen, wobei das Dicken-Breiten-Verhältnis der Scheiben und die Faltwerkslänge als Bestimmungsgrößen dienen. Bei G r u b e r wurde nur an Hand eines Zahlenbeispiels gezeigt, daß die Abweichung gegen die Gelenkfaltwerksergebnisse nicht vernachlässigbar sind. Weiteres Schrifttum ist ausführlich in den Standardwerken (z. B. G i r k m a n n [5] und F l ü g g e [6]) angegeben.

Bei Faltwerken mit drei Scheiben sind die Ergebnisse aus der Berechnung als Gelenkfaltwerk, als biegesteifes Faltwerk und als Balken mit der Technischen Biegelehre und der vereinfachten Wölbkrafttorsion ($I_D = 0$) identisch. Bei mehr als drei Scheiben lassen sich aus der „biegesteifen Theorie“ die Ergebnisse der Biegung und der vereinfachten Wölbkrafttorsion dadurch gewinnen, daß man die Querbiegesteifigkeit unendlich groß ansetzt. Ein solcher Versuch fehlt in allen Arbeiten. Vermutlich, weil die Theorie der Wölbkrafttorsion sich als Erweiterung der S t. V e n a n t s c h e n Torsion entwickelt hat mit dem Drillwiderstand als zunächst maßgebender Steifigkeit, lief die Entwicklung der Faltwerkstheorie und der Wölbkrafttorsion völlig unabhängig, ohne die vorhandenen Gemeinsamkeiten aufzudecken, nebeneinander her. L u n d g r e e n [7] hat dann von der Schalentheorie her die Abspaltung der Balkenlösung eingeführt und dabei auch die Wölbkrafttorsion mitgenommen. Der weitere Gang ist iterativer Art, wobei der Unterschied zwischen der Schubkraftverteilung aus der „Balkenlösung“ und der wirklichen Belastung als Zusatzlast auf den „Querschnittsrahmen“ aufgebracht wird.

In der vorliegenden Arbeit wird die Faltwerksberechnung durch Einführung geeigneter Resultanten für Spannungen (neue Schnittgrößen) und die Verformungen so aufbereitet, daß die endgültige Berechnung mit den gewohnten Formeln der Technischen Biegelehre ausgeführt werden kann. Es ergibt sich so eine systematische Erweiterung der Technischen Biegelehre auf Stäbe, deren Querschnitte nicht mehr als unverformbar angesehen werden können. Der aufwendige Teil der Rechnung, die Ermittlung der neuen Querschnittswerte, kann für gebräuchliche Querschnittsformen tabelliert werden, wobei auch stetig gekrümmte prismatische Schalen in guter Näherung mitbehandelt werden können. Der Vorteil besteht darin, daß sich die neuen Schnittgrößen bei Theorie I. Ordnung ebenso wie die bekannten (Biegemomente und Wölbmoment) un-

¹⁾ Von der Fakultät für Bauingenieurwesen der Technischen Hochschule Darmstadt angenommene Habilitationsschrift. Referent: Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. K. Klöppel. Korreferent: Prof. Dr. rer. techn. Dr. rer. nat. h. c. A. W a l t h e r.

abhängig voneinander behandeln lassen. Auch für die Berechnung der Faltwerke nach Theorie II. Ordnung bietet das Verfahren große Vorteile.

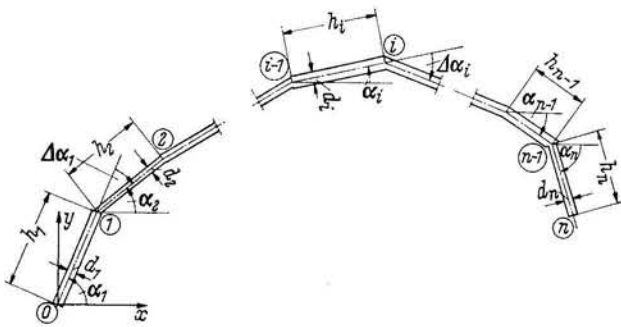


Bild 1. Querschnitt des Faltwerks mit Bezeichnungen

1.2. Bezeichnungen

Die folgenden Bezeichnungen werden verwendet (Bild 1):

- $a_{i,k}$ [1/cm] = Abkürzungen
- α_i = Winkel der Scheibe i in der Querschnittsebene gegen die x -Achse entgegen dem Uhrzeigersinn positiv (Bild 1)
- $\Delta\alpha_i$ = Kontingenzwinkel der Scheiben i und $i+1$ (Bild 1)
- $b_{i,k}$ [1/cm] = Abkürzungen
- ${}^k\bar{B}$ = k -ter Eigenwert aus Gl. (22)
- kB [Mp/cm²] = Resultante der Querbiegesteifigkeit für Verformungszustand k
- β_{ik} = Elastizitätswerte für die Querbiegung
- kC [cm⁴] = Wölbwiderstand für Verformungszustand k
- d_i [cm] = Dicke der Scheibe i
- kD [cm²] = Drillwiderstand für Verformungszustand k
- ϑ_i = Verdrehung der Scheibe i in der Querschnittsebene, im Uhrzeigersinn positiv
- E [Mp/cm²] = Elastizitätsmodul
- ϵ_z = Dehnung in z -Richtung
- ${}^k f_{Li}, {}^k f_{Qi}$ [1] = Verschiebungskomponenten des Schwerpunkts der Scheibe i in der Querschnittsebene im Einheitsverformungszustand ${}^kV = 1$ [cm]
- $\bar{f}_{i,i}, \bar{f}_{i+1,i}$ = Verschiebungskomponenten des Knotens i in der Querschnittsebene
- F [cm²] = Querschnittsfläche des Faltwerks
- ${}^k\varphi_i$ [cm] = Einheitsverwölbung, Verschiebung des Knotens i aus der Querschnittsebene für ${}^kV = 1$
- h_i [cm] = Höhe der Scheibe i (Bild 1)
- η = Argument in der Lösung der Differentialgl. (29)
- i = Index, in der Regel für das Zählen der Scheiben und Knoten
- I_1, I_2 [cm⁴] = Hauptträgheitsmomente, identisch mit 1C und 2C
- k = Index, in der Regel oben links die Ordnung des Verformungszustandes bezeichnend, im gleichen Sinne auch zur Zählung der Eigenwerte \bar{B}
- l [cm] = Länge des Faltwerks in z -Richtung
- $\lambda_{1,2,3,4}$ = Wurzeln der charakteristischen Gleichung
- m_i = Querbiegemoment am Knoten i
- ${}^{ik}m$ = Beiwerte für die Schnittgrößen bei Theorie II. Ordnung
- M_1, M_2 [Mp·cm] = Hauptbiegemomente, identisch mit 1W und 2W
- \mathfrak{M} = Matrix, zeigt die Beziehungen zwischen den Querbiegemomenten und den Wölbordinaten
- μ_{ik} = Elemente der Matrix \mathfrak{M}
- n = Anzahl der Scheiben des Querschnitts
- ${}^{ik}n$ = Beiwerte für die Normalkraft bei Theorie II. Ordnung

- N = Normalkraft, identisch mit 0W
- q = Belastungsvektor mit den Komponenten q_i
- q_i [Mp/cm] = Scheibenbelastung, in der Ebene der Scheibe i wirkend
- kq [Mp/cm] = Belastungresultante im Zustand k
- ${}^k s_i$ = Elemente des Vektors ${}^k f$
- S_i = Scheibenkraft in der Scheibe i aus $d\sigma$
- $[, {}^k f]$ = Vektor der Scheibenkräfte aus $d\sigma$ mit n Komponenten $S_i, {}^k s_i$
- \mathfrak{S} = Matrix, Beziehungen zwischen den Scheibenkräften aus $d\sigma$ und den Wölbordinaten
- σ_{ik} = Elemente der Matrix \mathfrak{S}
- σ_i = Längsspannung am Knoten i
- ${}^k t_i$ = Elemente des Vektors ${}^k t$
- T_i = Scheibenkraft in der Scheibe i aus Querbiegung
- $t, {}^k t$ = Vektor der Scheibenkräfte aus Querbiegung mit n Komponenten $T_i, {}^k t_i$
- \mathfrak{T} = Matrix, Beziehung zwischen den Scheibenkräften aus Querbiegung und den Wölbordinaten
- τ_{ik} = Elemente der Matrix \mathfrak{T}
- kV [cm] = Resultante der Verformung k Komponenten ${}^k f_{Li}, {}^k f_{Qi}, {}^k \vartheta_i$
- v = Vektor der Verformungen
- w_i [cm] = Wölbordinate des Knotens i Verschiebung aus der Querschnittsebene
- kW [Mp·cm] = Wölbmoment, Schnittgröße aus den Wölbspannungen ${}^k\sigma$
- w = Vektor der Verwölbungen, $n+1$ Komponenten w_i
- ω = Hilfswert zur Ermittlung des Wölbmomentes und der Verformung in Feldmitte
- x, y = Querschnittskoordinaten (Bild 1)
- z = Koordinate in Faltwerkslängsrichtung (Erzeugende)
- ξ = Argument in der Lösung der Dgl. (29)

1.3. Voraussetzungen

1. Das Tragwerk sei in z -Richtung (Erzeugende) prismatisch.
2. Der Querschnitt (x, y -Ebene) sei einfach zusammenhängend (offen), unverzweigt und bestehe aus n geraden Abschnitten (Scheiben) mit jeweils konstanter Dicke, von denen jeweils zwei aufeinanderfolgende verschiedene Richtungen haben sollen.
3. Die Dicke d der Abschnitte sei klein gegen die Querschnittsabmessungen h .
4. Das Hooke'sche Gesetz gelte unbegrenzt.
5. Die Längsspannungen σ_z seien über die Dicke d der Scheiben konstant, über die Höhe h linear verteilt.
6. Die Verformungen seien klein gegen die Querschnittsabmessungen h .
7. In den Mittelebenen der Scheiben gibt es keine Schubverzerrungen und nur Spannungen in Längsrichtung z .
8. Die Drillmomente der einzelnen Scheiben werden im Gesamtgleichgewicht berücksichtigt, ihr Einfluß auf die Form der Einheitsverwölbungen wird vernachlässigt. Deshalb spielen sie in den Ableitungen des Abschnittes 2 keine Rolle.

2. Ableitung der Querschnittswerte

2.1. Die geometrischen Beziehungen zwischen den Verschiebungen in der Querschnittsebene (x, y) und den Wölbordinaten w

Wegen der vernachlässigten Schubverzerrungen in der Mittelebene der Scheiben (Voraussetzung 7) erhält man für die Scheibe i gemäß Bild 2 aus den Verschiebungen w_i und w_{i+1} in z -Richtung die Verschiebungskomponente in der Scheibenebene

$$f'_{Li} = \frac{df_{Li}}{dz} = - \frac{w_i - w_{i-1}}{h_i} \dots \dots \dots (1)$$

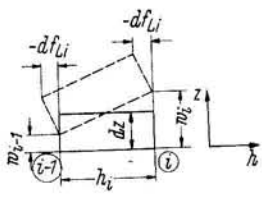


Bild 2. Verschiebungen in der Scheibenebene

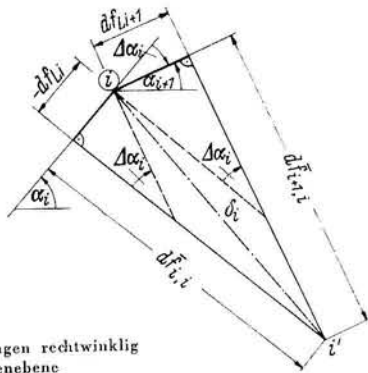


Bild 3. Verschiebungen rechtwinklig zur Scheibenebene

Die Formel (1) gilt für alle Scheiben $1 \leq i \leq n$.

Auf die Verschiebungen der Punkte i und $i-1$ rechtwinklig zur Scheibenebene haben auch die Verwölbungen der Nachbarscheiben einen Einfluß (Bild 3).

Die Projektionen der Verschiebungen δ_i des Knotens i in Richtung der Scheiben i und $i+1$ sind

$$d\bar{f}_{i,i} = -\frac{df_{Li}}{\tan \Delta\alpha_i} + \frac{df_{Li+1}}{\sin \Delta\alpha_i}$$

und

$$d\bar{f}_{i+1,i} = \frac{df_{Li+1}}{\tan \Delta\alpha_i} - \frac{df_{Li}}{\sin \Delta\alpha_i}$$

Wenn man Gl. (1) einsetzt, kann man auch diese Verschiebungen durch die Wölbordinaten w_i ausdrücken

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{f}_{i,i}}{dz} &= \frac{w_i - w_{i-1}}{h_i \cdot \tan \Delta\alpha_i} - \frac{w_{i+1} - w_i}{h_{i+1} \cdot \sin \Delta\alpha_i} \\ &= -\frac{1}{h_i \cdot \tan \Delta\alpha_i} \cdot w_{i-1} + \left(\frac{1}{h_i \cdot \tan \Delta\alpha_i} + \frac{1}{h_{i+1} \cdot \sin \Delta\alpha_i} \right) \cdot w_i \\ &\quad - \frac{1}{h_{i+1} \cdot \sin \Delta\alpha_i} \cdot w_{i+1} \end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} a_{i,1} &= -\frac{1}{h_i \cdot \tan \Delta\alpha_i} \\ a_{i,2} &= \frac{1}{h_i \cdot \tan \Delta\alpha_i} + \frac{1}{h_{i+1} \cdot \sin \Delta\alpha_i} \\ a_{i,3} &= -\frac{1}{h_{i+1} \cdot \sin \Delta\alpha_i} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

wird

$$\frac{d\bar{f}_{i,i}}{dz} = a_{i,1} \cdot w_{i-1} + a_{i,2} \cdot w_i + a_{i,3} \cdot w_{i+1} \dots \dots \dots (3)$$

Auf die gleiche Weise erhält man mit den Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} b_{i+1,1} &= -\frac{1}{h_i \cdot \sin \Delta\alpha_i} \\ b_{i+1,2} &= \frac{1}{h_i \cdot \sin \Delta\alpha_i} + \frac{1}{h_{i+1} \cdot \tan \Delta\alpha_i} \\ b_{i+1,3} &= -\frac{1}{h_{i+1} \cdot \tan \Delta\alpha_i} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

die Änderung der Verschiebung rechtwinklig zur Scheibe $i+1$

$$\frac{d\bar{f}_{i+1,i}}{dz} = b_{i+1,1} \cdot w_{i-1} + b_{i+1,2} \cdot w_i + b_{i+1,3} \cdot w_{i+1} \dots \dots (5)$$

Die Formeln (3) und (5) gelten für $1 \leq i \leq n-1$.

Als endgültige Verschiebungskomponenten in der Querschnittsebene werden gemäß Bild 4 die Größen f_{Li} , f_{Qi} und ϑ_i vereinbart. Diese Größen, die den Verschiebungszustand jeder Scheibe eindeutig beschreiben, werden ebenfalls durch die Wölbordinaten ausgedrückt:

$$\frac{df_{Li}}{dz} = f'_{Li} = -\frac{w_i - w_{i-1}}{h_i} \dots \dots \dots (6)$$

$$\frac{df_{Qi}}{dz} = f'_{Qi} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{f}_{i,i}}{dz} + \frac{d\bar{f}_{i+1,i}}{dz} \right)$$

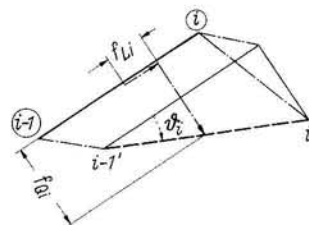


Bild 4. Verschiebungskomponenten

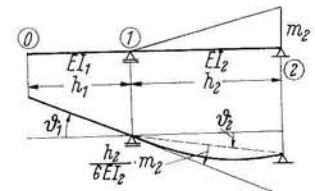


Bild 6. Verdrehung der Scheibe 1

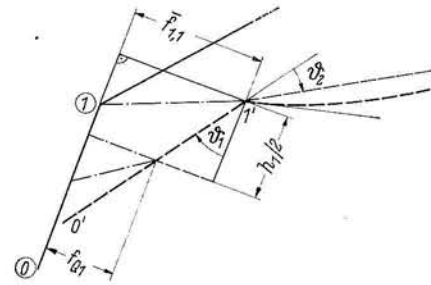


Bild 5. Verformung der Scheibe 1

$$f'_{Qi} = \frac{1}{2} [b_{i,1} \cdot w_{i-2} + (a_{i,1} + b_{i,2}) \cdot w_{i-1} + (a_{i,2} + b_{i,3}) \cdot w_i + a_{i,3} \cdot w_{i+1}] \dots \dots \dots (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta_i}{dz} &= \frac{1}{h_i} \left(\frac{df_{i,i}}{dz} - \frac{df_{i-1,i}}{dz} \right) \\ \vartheta'_i &= \frac{1}{h_i} [-b_{i,1} \cdot w_{i-2} + (a_{i,1} - b_{i,2}) \cdot w_{i-1} + (a_{i,2} - b_{i,3}) \cdot w_i + a_{i,3} \cdot w_{i+1}] \dots \dots \dots (8) \end{aligned}$$

Die Formel (6) gilt für $1 \leq i \leq n$, die Formeln (7) und (8) für $2 \leq i \leq n-1$.

Für die Endscheiben wird die Voraussetzung getroffen, daß die Winkel ϑ gleich dem letzten Kantendrehwinkel sein sollen. Man geht davon nur ab, wenn die Endscheiben äußere Lasten tragen, die nicht in ihrer Ebene wirken.

$\bar{f}_{2,1}$ und $\bar{f}_{1,1}$ lassen sich mit den Formeln (3) und (5) bestimmen. Ferner sind f_{L1} und f_{L2} nach (6) bekannt. Damit wird

$$\bar{f}_{1,1} = a_{1,1} \cdot w_0 + a_{1,2} \cdot w_1 + a_{1,3} \cdot w_2$$

und (Bild 5):

$$f_{Q1} = \bar{f}_{1,1} - \frac{h_1}{2} \cdot \vartheta_1 \dots \dots \dots (9a)$$

mit $\vartheta_1 = \vartheta_2 + \frac{h_2}{6EJ_2} \cdot m_2$ (Bild 6).

Für die Endscheibe erhält man entsprechend mit

$$\bar{f}_{n,n-1} = b_{n,1} \cdot w_{n-2} + b_{n,2} \cdot w_{n-1} + b_{n,3} \cdot w_n$$

$$f_{Qn} = \bar{f}_{n,n-1} + \vartheta_n \cdot \frac{h_n}{2} \dots \dots \dots (9b)$$

$$\vartheta_n = \vartheta_{n-1} - \frac{h_{n-1}}{6EJ_{n-1}} \cdot m_{n-2}$$

2.2. Die Beziehungen zwischen den Querbiegemomenten m und den Wölbordinaten w

Wenn die Drehwinkel ϑ_i nicht für alle Scheiben gleich groß sind, entstehen Querbiegemomente, die von Knoten (Kante) zu Knoten linear verlaufen. Sie sind von den Differenzen der Stabdrehwinkel ($\vartheta_{i+1} - \vartheta_i$) abhängig.

Zur Ermittlung dieser Querbiegemomente wird der Querschnitt als ein biegesteifer Rahmen mit den „Stab“-Längen h_i und den „Stab“-Querschnitten $d_i \cdot dz$ angesehen. Dieser Rahmen kann für die unmittelbar folgende Ableitung in der Abwicklung (gestreckt) betrachtet werden (Bild 7). Der Stabzug ist $(n-3)$ -fach statisch unbestimmt. Als Überzählige werden die Stützmomente an den Knoten 2 bis $n-2$ eingeführt. Es ergibt sich ein dreigliedriges Gleichungssystem mit

$$\delta_{i,i-1} = \delta_{-1,i} = \frac{h_i}{6EJ_i} \quad \text{und} \quad \delta_{i,i} = \frac{1}{3} \left(\frac{h_i}{EJ_i} + \frac{h_{i+1}}{EJ_{i+1}} \right)$$

Die Elemente β_{ik} der Kehrmatrix dieses Gleichungssystems werden im folgenden benutzt, wobei i und k von 2 bis $n-2$ laufen.

Aus dem Verformungszustand ϑ_i (Bild 7 d) erhält man als Belastungsglieder $\delta_{i-1,0} = \vartheta_i$ und $\delta_{i,0} = -\vartheta_i$. Sind auch die anderen Stabdrehwinkel von Null verschieden, so ergibt sich allgemein

$$\delta_{i,0} = \vartheta_{i+1} - \vartheta_i \dots \dots \dots (10)$$

Formel (10) gilt für $2 \leq i \leq n-2$.

Mit den β_{ik} -Werten und den Belastungsgliedern $\delta_{i,0}$ lassen sich die Stützmente anschreiben:

$$m_i = - \sum_k \beta_{i,k} \cdot \delta_{k,0} \dots \dots \dots (11)$$

(10) in (11) eingesetzt führt auf

$$m_i = - [\beta_{i,2} \cdot \delta_{2,0} + \beta_{i,3} \cdot \delta_{3,0} + \dots + \beta_{i,n-2} \cdot \delta_{n-2,0} + \beta_{i,2} \cdot \vartheta_2 + (\beta_{i,3} - \beta_{i,2}) \cdot \vartheta_3 + (\beta_{i,4} - \beta_{i,3}) \cdot \vartheta_4 + \dots - \beta_{i,n-2} \cdot \vartheta_{n-2}]$$

Um ϑ_i zu eliminieren, muß nach z differenziert und die Formel (8) eingesetzt werden:

$$m'_i = \frac{1}{h_2} \cdot \beta_{i,2} [-b_{2,1} \cdot w_0 + (a_{2,1} - b_{2,2}) \cdot w_1 + (a_{2,2} - b_{2,3}) \cdot w_2 + a_{2,3} \cdot w_3] + \frac{1}{h_3} (\beta_{i,3} - \beta_{i,2}) [-b_{3,1} \cdot w_1 + (a_{3,1} - b_{3,2}) \cdot w_2 + (a_{3,2} - b_{3,3}) \cdot w_3 + a_{3,3} \cdot w_4] + \frac{1}{h_4} (\beta_{i,4} - \beta_{i,3}) [-b_{4,1} \cdot w_2 + (a_{4,1} - b_{4,2}) \cdot w_3 + (a_{4,2} - b_{4,3}) \cdot w_4 + a_{4,3} \cdot w_5] + \frac{1}{h_5} (\beta_{i,5} - \beta_{i,4}) [\dots] \dots + \frac{1}{h_{n-2}} (-\beta_{i,n-2}) [-b_{n-2,1} \cdot w_{n-3} + (a_{n-2,1} - b_{n-2,2}) \cdot w_{n-2} + (a_{n-2,2} - b_{n-2,3}) \cdot w_{n-1} + a_{n-2,3} \cdot w_n] \dots \dots \dots (12)$$

Für die $n-3$ -Momente m'_i ergibt sich somit ein Gleichungssystem mit $n-3$ Zeilen und $n+1$ Spalten. Die Elemente der Matrix werden μ_{ik} genannt. Sie sind durch die Gleichung (12) festgelegt:

	w_0	w_1	\dots	w_k	\dots	w_n
m'_2	$\mu_{2,0}$	$\mu_{2,1}$	\dots	$\mu_{2,k}$	\dots	$\mu_{2,n}$
m'_3	$\mu_{3,0}$	$\mu_{3,1}$	\dots	$\mu_{3,k}$	\dots	$\mu_{3,n}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
m'_i	$\mu_{i,0}$	$\mu_{i,1}$	\dots	$\mu_{i,k}$	\dots	$\mu_{i,n}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
m'_{n-2}	$\mu_{n-2,0}$	$\mu_{n-2,1}$	\dots	$\mu_{n-2,k}$	\dots	$\mu_{n-2,n}$

(12a)

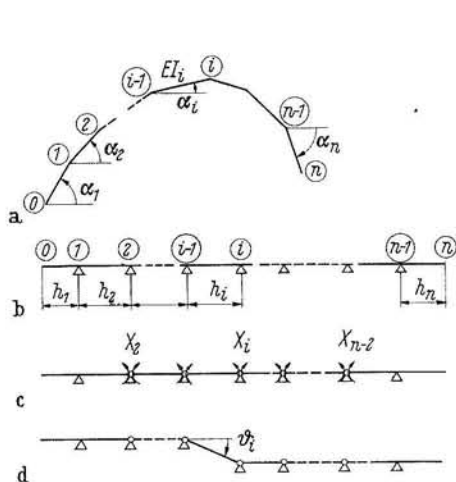


Bild 7. a) Querschnitt
b) Abwicklung des Querschnitts
c) Statisches bestimmtes System und Überzählige
d) Verformungszustand ϑ_i

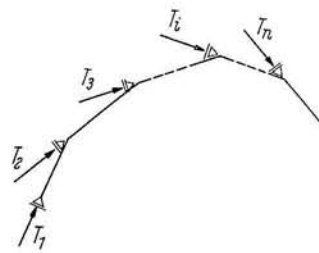


Bild 8. Wirkungweise der Scheibenkräfte T_i als Lagerreaktionen des „Stabzuges“

Aus den Stützmomenten erhält man Querkräfte $\bar{q}_i = \left(\frac{m_i - m_{i-1}}{h_i} \right)$. Sie stellen für den Querschnitt Kantenlasten dar. Um die daraus entstehenden Scheibenkräfte T zu bestimmen (Bild 8), muß man den gestreckten Durchlaufträger nun verlassen und sich wieder dem wirklichen Querschnitt zuwenden. Die Änderung der Scheibenkräfte in z -Richtung ist der Scheibenbelastung gleich. Zur Ermittlung der Scheibenkräfte hat man die Stützmente m_i durch die zugehörigen Querkräfte \bar{q}_i ersetzt.

Aus den beiden Kräftecken in Bild 9 erhält man:

$$T'_i = - \frac{\bar{q}_{i-1}}{\sin \Delta \alpha_{i-1}} + \frac{\bar{q}_i}{\tan \Delta \alpha_{i-1}} + \frac{\bar{q}_i}{\tan \Delta \alpha_i} - \frac{\bar{q}_{i+1}}{\sin \Delta \alpha_i}$$

Hierin kann man wieder \bar{q} durch m ersetzen:

$$T'_i = - \frac{m_{i-1} - m_{i-2}}{h_{i-1} \cdot \sin \Delta \alpha_{i-1}} + \frac{m_i - m_{i-1}}{h_i \cdot \tan \Delta \alpha_{i-1}} + \frac{m_i - m_{i-1}}{h_i \cdot \tan \Delta \alpha_i} - \frac{m_{i+1} - m_i}{h_{i+1} \cdot \sin \Delta \alpha_i} = \frac{1}{h_{i-1} \cdot \sin \Delta \alpha_{i-1}} \cdot m_{i-2} - \left(\frac{1}{h_{i-1} \cdot \sin \Delta \alpha_{i-1}} + \frac{1}{h_i \cdot \tan \Delta \alpha_{i-1}} + \frac{1}{h_i \cdot \tan \Delta \alpha_i} \right) \cdot m_{i-1} + \left(\frac{1}{h_i \cdot \tan \Delta \alpha_{i-1}} + \frac{1}{h_i \cdot \tan \Delta \alpha_i} + \frac{1}{h_{i+1} \cdot \sin \Delta \alpha_i} \right) \cdot m_i - \frac{1}{h_{i+1} \cdot \sin \Delta \alpha_i} \cdot m_{i+1}$$

Mit den Abkürzungen (2) und (4) schreibt sich T'_i :

$$T'_i = -b_{1,i-1} \cdot m_{i-2} - (b_{2,i-1} - a_{1,i}) \cdot m_{i-1} - (b_{3,i-1} - a_{2,i}) \cdot m_i + a_{3,i} \cdot m_{i+1} \dots \dots \dots (13)$$

Die Formel (13) gilt für $2 \leq i \leq n-1$.

Um endgültig die Beziehung zwischen den Schubkräften T_i und den Wölbordinaten w_i herzustellen, muß man noch die μ_{ik} -Werte einführen und nach z differenzieren:

$$T''_i = -b_{1,i-1} \cdot \sum_k \mu_{i-2,k} \cdot w_k - (b_{2,i-1} - a_{1,i}) \cdot \sum_k \mu_{i-1,k} \cdot w_k - (b_{3,i-1} - a_{2,i}) \cdot \sum_k \mu_{i,k} \cdot w_k + a_{3,i} \cdot \sum_k \mu_{i+1,k} \cdot w_k \dots \dots \dots (14)$$

Die Formel (14) gilt für $1 \leq i \leq n$.

Bei den Werten $T''_1, T''_2, T''_3, T''_{n-2}, T''_{n-1}, T''_n$ ist zu beachten, daß einige μ_{ik} -Werte aus dem Indexbereich der Matrix (12a) herausfallen. Diese sind Null zu setzen. Damit erspart man sich besondere Randformeln.

2.3. Die Beziehungen zwischen den Schubkräften S_i aus der Veränderlichkeit der Längsspannungen σ_z und den Wölbordinaten w

Nach Voraussetzung 7 kann man für die Mittelebenen der Scheiben das Elastizitätsgesetz für den einachsigen Spannungszustand anwenden. Daraus folgt, daß die Längsspannung σ_z gleich der

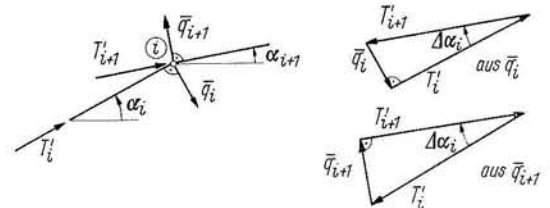


Bild 9. Ermittlung der Scheibenkräfte T aus den Querkraften q

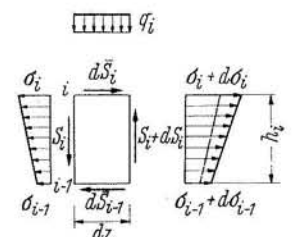


Bild 10. Beanspruchungen am verformten Scheibenelement

E-fachen Dehnung ε_z , das heißt der Änderung der Verwölbung in z-Richtung, ist:

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z = E \cdot \frac{dw}{dz} = E \cdot w' \quad \dots \quad (15)$$

Das Gleichgewicht in z-Richtung verlangt (Bild 10):

$$d\bar{S}_i - d\bar{S}_{i-1} + \int_{i-1}^i d\sigma \cdot d_i \cdot dh = 0.$$

Daraus erhält man die differentielle Kantenschubkraft:

$$d\bar{S}_i = d\bar{S}_{i-1} - \frac{d\sigma_{i-1} + d\sigma_i}{2} \cdot d_i \cdot h_i.$$

Der Schubfluß längs der Kante i ist:

$$S'_i = \frac{dS_i}{dz} = \bar{S}'_{i-1} - \left(\frac{d\sigma_{i-1}}{dz} + \frac{d\sigma_i}{dz} \right) \cdot \frac{d_i \cdot h_i}{2} \quad \dots \quad (16)$$

Aus dem Momentengleichgewicht um Punkt i (Bild 10) erhält man:

$$-(S_i + dS_i) \cdot dz + d\bar{S}_{i-1} \cdot h_i - d\sigma_{i-1} \cdot \frac{d_i \cdot h_i^2}{2} - (d\sigma_i - d\sigma_{i-1}) \cdot \frac{d_i \cdot h_i}{2} \cdot \frac{h_i}{3} + \frac{q_i \cdot dz^2}{2} = 0.$$

Unter Vernachlässigung der Glieder dS_i und $\frac{1}{2} q_i dz^2$, die von höherer Ordnung klein sind, wird

$$dz \cdot S_i = d\bar{S}_{i-1} \cdot h_i - d\sigma_{i-1} \cdot \frac{d_i \cdot h_i^2}{3} - d\sigma_i \cdot \frac{d_i \cdot h_i}{6}.$$

Um eine Rekursionsformel herstellen zu können, wird S_i mit S_{i-1} verglichen:

$$S_i \cdot \frac{1}{h_i} = \bar{S}'_{i-2} - (\sigma'_{i-2} + \sigma'_{i-1}) \cdot \frac{d_{i-1} \cdot h_{i-1}}{2} - \sigma'_{i-1} \cdot \frac{d_i \cdot h_i}{3} - \sigma'_i \cdot \frac{d_i \cdot h_i}{6}$$

$$S_{i-1} \cdot \frac{1}{h_{i-1}} = \bar{S}'_{i-2} - \sigma'_{i-2} \cdot \frac{d_{i-1} \cdot h_{i-1}}{3} - \sigma'_{i-1} \cdot \frac{d_{i-1} \cdot h_{i-1}}{6}.$$

Man erhält daraus:

$$S_i = \left[\frac{S_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{d_{i-1} \cdot h_{i-1}}{6} \cdot \sigma'_{i-2} - \frac{d_{i-1} \cdot h_{i-1} + d_i \cdot h_i}{3} \cdot \sigma'_{i-1} - \frac{d_i \cdot h_i}{6} \cdot \sigma'_i \right] \cdot h_i \quad \dots \quad (17)$$

Nun wird noch σ durch w mit (15) ersetzt und einmal nach z differenziert, so erhält man die zweite Hauptformel

$$\frac{1}{E} \cdot S'_i = \left[\frac{1}{E} \cdot \frac{S'_{i-1}}{h_{i-1}} - \left(\frac{d_{i-1} \cdot h_{i-1}}{6} \cdot w'''_{i-2} - \frac{d_{i-1} \cdot h_{i-1} + d_i \cdot h_i}{3} \cdot w'''_{i-1} - \frac{d_i \cdot h_i}{6} \cdot w'''_{i-1} \right) \right] \cdot h_i \quad (18)$$

Sie zeigt den Zusammenhang zwischen den Wölbordinaten w_i und den Schubkräften, die aus der Änderung der σ_z -Spannungen entstehen.

2.4. Die Entwicklung der Wölbfläche in Eigenfunktionen

Die Koeffizienten in den beiden Hauptformeln (14) und (18) werden τ_{ik} und σ_{ik} genannt, wobei angenommen wird, daß durch die Art der Indizes eine Verwechslung mit den Spannungen vermieden wird, die Zuordnung zu T und S aber augenfällig ist. Man kann dann schreiben:

$$T'_i = \sum_0^n \tau_{i,k} \cdot w_k \quad \text{und} \quad \frac{1}{E} \cdot S'_i = \sum_0^n \sigma_{i,k} \cdot w'_k.$$

Da n Schubkräfte, aber $n + 1$ Wölbordinaten vorhanden sind, wird noch die Bedingung benutzt, daß der Schubfluß am Querschnittsende (Punkt n) verschwinden muß. Man erhält sie aus der Integration des Schubflusses über den ganzen Querschnitt zu

$$\frac{1}{E} \cdot \frac{S'_n}{h_n} + \left(\frac{d_n \cdot h_n}{6} \cdot w'''_{n-1} + \frac{d_n \cdot h_n}{3} \cdot w'''_n \right) = 0 \quad \dots \quad (18a)$$

Man kann dadurch den vollständigen Vektor für die Verwölbung in der weiteren Rechnung beibehalten.

$$w = \begin{pmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Schreibt man für das gesamte Schema der Koeffizienten σ_{ik} und τ_{ik} die Matrixbezeichnungen \mathfrak{S} und \mathfrak{T} und für die Schubkräfte im gesamten Querschnitt die Vektorbezeichnungen \mathfrak{f} und \mathfrak{t} , so hat man die beiden Hauptformeln in der folgenden kurzen Form:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{E} \cdot \mathfrak{f}' &= \mathfrak{S} \cdot w''' \\ \mathfrak{t}' &= \mathfrak{T} \cdot w \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19)$$

Die Gleichungen (6), (7) und (8) zeigten, daß die Wölbordinaten w_i (Komponenten des Vektors w) von der 1. Ableitung der Verformungen v in der Querschnittsebene nach z abhängen. Diese Verformungen lassen sich mit $n + 1$ Grundvektoren ${}^k v$ durch Linearkombination darstellen. Die Komponenten des Vektors v sind die in Bild 4 angegebenen Verformungsgrößen f_L, f_Q und ϑ

$$v = \sum_0^n {}^k v \cdot {}^k v.$$

Gemäß den Gleichungen (6), (7) und (8) wird w durch die 1. Ableitung der Verformungsgrößen gegeben.

Damit ist

$$w = \sum_0^n {}^k v' \cdot {}^k w.$$

${}^k w$ sind die Einheitsverwölbungen mit den Ordinaten ${}^k \varphi(h)$, die sich aus der Einheitsverformung ${}^k v' = 1$ ergeben. Die Ordinaten an den Knoten i des Querschnitts sind die Komponenten ${}^k \varphi_i$ des Vektors ${}^k w$. V stellt den Wert der Verformungsresultanten dar. Für die Zählung der Grundzustände erhalten die Vektoren und ihre Komponenten sowie die zugehörigen Konstanten einen links oben stehenden Index k .

Man führt diese Bezeichnungen nun in (19) ein und erhält

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{f}' &= \mathfrak{S} \cdot \sum_0^n {}^k C \cdot E \cdot {}^k v^{IV} \cdot \frac{{}^k w}{{}^k C} = \sum_0^n E \cdot {}^k C \cdot {}^k v^{IV} \cdot {}^k \mathfrak{f} \\ \mathfrak{t}' &= \mathfrak{T} \cdot \sum_0^n {}^k v \cdot {}^k w = \sum_0^n {}^k v \cdot {}^k \mathfrak{t} \end{aligned} \right\} \dots \dots (20)$$

${}^k C$ ist ein den einzelnen Wölbvektoren ${}^k w$ zugeordneter Querschnittsbeiwert, der hier schon eingeführt wird, um die Analogie zur Technischen Biegelehre zu vervollständigen und für den sich, wenn man die innere Arbeit der σ_z -Spannungen durch die Verformungsresultante V ausdrückt, die Festlegung

$${}^k C = \int_F {}^k \varphi^2(h) \cdot dF \quad \dots \dots \dots (21)$$

ergibt.

Es kommt nun der entscheidende Schritt, indem man verlangt, daß die Grundvektoren ${}^k \mathfrak{f}$ und ${}^k \mathfrak{t}$ affin sein sollen. Das heißt

$${}^k \mathfrak{t} = {}^k B \cdot {}^k \mathfrak{f}.$$

Diese Forderung bedeutet keine Einschränkung im Sinne der Allgemeingültigkeit der Lösung, sondern eine bestimmte Art der Zerlegung in Grundlösungen.

Setzen wir die Ausdrücke (20) ein

$$\begin{aligned} {}^k C \cdot {}^k \mathfrak{f} &= \mathfrak{S} \cdot {}^k w \\ {}^k \mathfrak{t} &= \mathfrak{T} \cdot {}^k w, \end{aligned}$$

so erhalten wir das Matrizeigenwertproblem

$$(\mathfrak{T} - {}^k B \cdot \mathfrak{S}) \cdot {}^k w = 0 \quad \dots \dots \dots (22)$$

mit

$${}^k B = {}^k C \cdot {}^k \bar{B}$$

Das Eigenwertproblem ergibt $n + 1$ Eigenwerte ${}^k \bar{B}$. Davon sind numerisch nur $n - 3$ zu erhalten. Die ersten vier sind Null. Das sind die Bewegungsmöglichkeiten des Querschnitts, bei denen keine oder nur gleiche ϑ_i -Verdrehungen der einzelnen Scheiben auftreten, das heißt, bei denen der Querschnitt in seiner Ebene nur eine Starrkörperbewegung macht, also die Querschnittsform erhalten bleibt. Es entziehen sich hier gerade die Verformungsanteile der numerischen Erfassung, die man bei der Technischen Biegelehre und der Wölbkrafttorsion ausschließlich betrachtet, sie sind in diesem Fall trivial.

Für die Ermittlung der anderen Eigenwerte ${}^k B$ für $k = 4$ bis $k = n$ gibt es mathematische Verfahren, die hier nicht näher erläutert werden müssen. Die Eigenvektoren erhält man bis auf einen unbestimmten Faktor. Dieser Faktor ist frei wählbar und hat keine mechanische Bedeutung. Man kann ihn z. B. so bestimmen, daß die größte Komponente des Eigenvektors gleich 1 wird oder daß der Wölbwiderstand ${}^k C$ gleich 1 wird.

Die Eigenfunktionen lassen sich auch aus einem Schwingungsproblem gewinnen. Dabei wird ein Stabelement der Länge dz so geführt, daß alle Punkte des Querschnitts z sich nur in z -Richtung, die des Querschnitts $z + dz$ auch in der Querschnittsebene x, y bewegen können. Trägheitskräfte wirken nur in z -Richtung. Die Massenbelegung entspricht der Scheibendicke. Für die elastischen Verformungen gelten die am Anfang der Arbeit vereinbarten Voraussetzungen.

3. Die Belastungswerte

3.1. Die Gleichgewichtsbedingung

Die äußere Belastung des Faltwerks kann man in bekannter Weise zu Kantenlasten zusammenfassen und diese dann wieder in die Scheibenebenen zerlegen. In dieser zuletzt genannten Form soll weiterhin die äußere Last behandelt werden. Sie wird durch den Vektor

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

dargestellt. Die Komponenten q_i sind die Scheibenlasten.

Um die Affinität, die man durch Entwicklung der Verwölbung in Eigenfunktionen für die inneren Schubkräfte erreichen konnte, auch auf die äußere Belastung auszudehnen, stellt man diese ebenfalls durch eine Linearkombination der Einheitsvektoren ${}^k \bar{f}$ dar.

$$q = \sum_1^n {}^k q \cdot {}^k \bar{f} \dots \dots \dots (23)$$

Für die Gesamtheit der Schubkräfte gilt dann die Gleichgewichtsbedingung

$$\bar{f}' + t' - q = 0$$

oder

$$\sum_1^n {}^k E \cdot {}^k C \cdot {}^k V''' \cdot {}^k \bar{f} + \sum_1^n {}^k B \cdot {}^k V \cdot {}^k \bar{f} = \sum_1^n {}^k q \cdot {}^k \bar{f}$$

Man hat damit jedes Glied der Gleichgewichtsbedingung zerlegt in einen Anteil, der nur von z und einen anderen, der nur von der Querschnittskoordinate h abhängt.

Dieser Letztgenannte ist in allen drei Gliedern gleich und kann daher herausgekürzt werden. Dann bleibt eine gewöhnliche Differentialgleichung 4. Ordnung für die Resultante ${}^k V(z)$ jeder Einheitsverformung mit den zugehörigen Querschnittswerten.

$$E \cdot {}^k C \cdot {}^k V'''(z) + {}^k B \cdot {}^k V(z) = {}^k q(z) \dots \dots \dots (24)$$

Sie hat dieselbe Form wie die Differentialgleichung des Balkens auf kontinuierlicher elastischer Bettung. Die „Schnittgröße“ wird ${}^k W$ genannt. Sie wird als Wölbmoment mit der Definition

$${}^k W = - E \cdot {}^k C \cdot {}^k V'' \dots \dots \dots (25)$$

bezeichnet und stellt eine Resultante der Längsspannungen ${}^k \sigma_z$ dar. Wie bei den bekannten Schnittgrößen aus Längsspannungen sind auch hier die Spannungen ${}^k \sigma_z$ den Einheitsverwölbungen ${}^k \varphi$ aus dem zugehörigen Verformungszustand ${}^k V$ proportional. Der Verhältniswert ist der in Formel (21) angegebene Wölbwiderstand ${}^k C$. Die ${}^k C$ -fachen Spannungen gleichen den mit der Schnittgröße ${}^k W$ multiplizierten Einheitsverwölbungen

$${}^k C \cdot {}^k \sigma = {}^k W \cdot {}^k \varphi$$

oder in der uns aus der Technischen Biegelehre und der Wölbkrafttorsion geläufigen Form

$${}^k \sigma_i = \frac{{}^k W \cdot {}^k \varphi_i}{{}^k C} \dots \dots \dots (26)$$

3.2. Die Zerlegung der äußeren Last

Für die Zerlegung der äußeren Last gemäß Vorschrift (23) hat man zwei Möglichkeiten.

1. Man stellt für jede Scheibe eine Superpositionsgleichung auf und erhält damit ein Gleichungssystem mit den Überzähligen ${}^k q$:

$$\left. \begin{array}{l} {}^1 q \cdot {}^1 s_1 + {}^2 q \cdot {}^2 s_1 + \dots + {}^n q \cdot {}^n s_1 = q_1 \\ {}^1 q \cdot {}^1 s_2 + {}^2 q \cdot {}^2 s_2 + \dots + {}^n q \cdot {}^n s_2 = q_2 \\ \vdots \\ {}^1 q \cdot {}^1 s_n + {}^2 q \cdot {}^2 s_n + \dots + {}^n q \cdot {}^n s_n = q_n \end{array} \right\} \dots \dots \dots (27)$$

${}^k s_i$ sind die Komponenten des Vektors ${}^k \bar{f}$. Man kommt hierbei ohne Kenntnis der Verformungen aus, muß dafür aber alle n Gleichungen aufstellen und lösen. Dieses Verfahren kann daher nicht bei Aufgaben angewandt werden, bei denen, um Rechenaufwand einzusparen, die Eigenwerte und die zugehörigen Einheits Schubkräfte nicht alle ermittelt worden sind. Das kommt in der Regel da vor, wo stetig gekrümmte Schalen durch ein Faltwerk angenähert werden. In diesen Fällen ist es günstig, in viele Scheiben zu unterteilen, um den Spannungsverlauf möglichst genau zu erhalten. Dadurch steigt aber auch die Anzahl der Eigenwerte. Mit steigendem Eigenwert wird aber der Querbiege widerstand B so groß, daß die zugehörigen Schnittgrößen keinen wesentlichen Beitrag mehr zu den Längsspannungen liefern. Hier empfiehlt sich die nächste Methode.

2. Man kann die Aufteilung der äußeren Last auch entsprechend der Arbeit vornehmen, die sie an den Einheitsverformungen leistet.

Da die äußere Last in die Scheibenbelastungen q_i zerlegt wurde, kommen als Wege nur die Verschiebungen f_{Li} der Scheiben in ihrer Ebene und der Querschnittsebene in Frage.

Die gesamte Arbeit der äußeren Last beträgt

$$A_a = \sum_1^n q_i \cdot f_{Li} = \sum_1^n q_i \sum_1^n q_i \cdot {}^k f_{Li}$$

Die k Glieder der Doppelsumme stellen die gesuchten Komponenten ${}^k q$ der äußeren Last dar.

Man hat also die Bestimmungsgleichung

$${}^k q = \sum_1^n q_i \cdot {}^k f_{Li} = \bar{f} \cdot q \dots \dots \dots (27a)$$

Mit dieser Formel (27 a) hat man die Möglichkeit, die Belastungsanteile zu den einzelnen Schnittgrößen unabhängig voneinander zu berechnen, so daß man nur die für ausreichende Genauigkeit notwendigen mitnehmen muß.

Die q_i sind positiv einzusetzen, wenn sie wie die Reaktionen in Bild 8 wirken. Aus dem Vergleich der Gleichungssysteme (27) und (27 a) sieht man, daß die Matrix \bar{f} die Kehrmatrix der Koeffizientenmatrix von (27) ist.

4. Berücksichtigung der Drillsteifigkeit

Im Einheitsverformungszustand ${}^kV' = 1$ erhalten die einzelnen Scheiben im allgemeinen unterschiedliche Verdrillungen ${}^kV' \cdot {}^k\vartheta_i$. Dazu gehört in jeder Scheibe ein Drillmoment

$${}^kM_{Di} = G \cdot J_{Di} \cdot {}^k\vartheta_i \cdot {}^kV'$$

Auch in den Fällen, in denen die Gesamtheit der Drillmomente keine äußere Resultierende hat, stellen sie doch einen Widerstand für die Einheitsverwölbung dar. Er ergibt sich aus der Formänderungsarbeit

$$\begin{aligned} - {}^kA_i(\vartheta) &= \frac{1}{2} \int \sum_i^n G \cdot J_{Di} \cdot {}^k\vartheta_i \cdot {}^kV' \cdot {}^k\vartheta_i \cdot {}^kV' \cdot dz \\ &= \frac{1}{2} \int G \cdot {}^kD \cdot {}^kV'^2 \cdot dz \end{aligned}$$

zu
$${}^kD = \sum_i^n J_{Di} \cdot {}^k\vartheta_i^2 = \frac{1}{3} \sum_i^n h_i \cdot d_i^3 \cdot {}^k\vartheta_i^2 \quad \dots \dots (28)$$

Der Drillwiderstand kD hat die Dimension [cm²], weil die Verdrehungen ${}^k\vartheta_i$ der Scheiben auf V bezogene Größen sind und daher die Dimension [1/cm] haben. Für die Torsion mit unverformbarem Querschnitt (klassische Wölbkrafttorsion) geht (28) über in die bekannte Formel

$$J_D = \frac{1}{3} \sum_i^n h_i \cdot d_i^3$$

Da keine im Sinne der S t. V e n a n t'schen Schubspannungen wirkenden äußeren Lasten vorliegen, muß man für die Gleichgewichtsbetrachtungen die Drillmomente der Scheiben als Kantenlasten, und zwar jeweils ein Kräftepaar rechtwinklig zur Scheibenebene wirkend, betrachten. Diese wiederum lassen sich in Scheibenkräften ausdrücken. Die Verteilung dieser Scheibenkräfte hängt nicht nur vom Einheitsverwölbungszustand ${}^kV'$ ab, sondern auch von der Verteilung der Drillwiderstände J_{Di} der Scheiben. Man kann daher nicht annehmen, daß die Scheibenkräfte zum Vektor ${}^k\mathfrak{f}$ affin sind, sie bewirken vielmehr streng genommen eine zusätzliche Verformung des Querschnitts. Auf diese Einschränkung ist in der Voraussetzung 8 hingewiesen. Sie kann aber wegen der ebenfalls vorausgesetzten Dünnwandigkeit (Voraussetzung 3) hingenommen werden.

In der Gleichgewichtsaussage (23 a) läßt sich die Änderung des „Drillmomentes“ in z -Richtung durch den einfachen Ausdruck $G \cdot {}^kD \cdot {}^kV''$ berücksichtigen, so daß nun die vollständige Differentialgleichung in der Form

$$E \cdot {}^kC \cdot {}^kV'''(z) - G \cdot {}^kD \cdot {}^kV''(z) + {}^kB \cdot {}^kV(z) = {}^kq(z) \quad (29)$$

vorliegt. Sie entspricht der Differentialgleichung des Balkens auf kontinuierlicher elastischer Bettung mit Längskraft nach Theorie II. Ordnung und in bekannter Analogie auch der Differentialgleichung der Wölbkrafttorsion für den Stab mit kontinuierlicher elastischer Drehbettung.

5. Die Lösung der Differentialgleichung (29)

5.1. Die allgemeine Lösung

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (29) macht keine Schwierigkeiten. Sie ist vom Beulen, vom Biegedrillknicken und vom elastisch gebetteten Stab her bekannt und für den letztgenannten Fall z. B. in [8] ausführlich dargestellt. Sie wird hier nur soweit angegeben, als sie für die Klärung der Bezeichnungsweise notwendig ist.

Mit dem Lösungsansatz $V(z) = e^{\lambda z}$ für die homogene Differentialgleichung erhält man aus der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^4 + \frac{G \cdot D}{E \cdot C} \cdot \lambda^2 + \frac{B}{E \cdot C} = 0$$

die vier Wurzeln

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{G \cdot D}{2 E \cdot C} \pm \sqrt{\left(\frac{G \cdot D}{2 E \cdot C}\right)^2 - \frac{B}{E \cdot C}}}$$

Mit l machen wir die Ausdrücke in der Wurzel dimensionslos

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - \eta^2}}$$

mit den Abkürzungen

$$\zeta = \frac{G \cdot D \cdot l^2}{2 E \cdot C}, \quad \eta = \sqrt{\frac{B \cdot l^4}{E \cdot C}}$$

5.2. Die Randbedingungen

Die Randbedingungen müssen durch die Verformungsergebnisse kV und ihre Ableitungen nach z , z. B. die Schnittgrößen, ausgedrückt werden können. Wenn an den Faltwerksenden starre Endscheiben die elastischen Verformungen in der Querschnittsebene verhindern, sind dort die Verformungen kV von $k = 4$ ab aufwärts gleich Null:

$${}^kV(0) = {}^kV(l) = 0 \quad (\text{Starre Endscheiben}).$$

Das gilt auch, wenn Gesamtverschiebungen oder Verdrehung (Starrkörperbewegung) möglich sind, das heißt die Bedingung gilt für jede Stelle z , an der ein starres Querschott vorhanden ist. Der Ersatzträger k erhält dort ein festes Lager. Ein Faltwerk mit starren Schotten an den Enden und in Feldmitte ist also für die Verformungen kV von $k = 4$ aufwärts ein Durchlaufräger auf drei Stützen.

Ist die Verwölbung verhindert, so sind die Verformungen ${}^kV'$ gleich Null.

$${}^kV'(0) = {}^kV'(l) = 0 \quad (\text{Verwölbung verhindert}).$$

Sind dagegen die Verwölbungen an den Enden frei, so kann dort kein Wölbmoment auftreten und demgemäß ist

$${}^kV''(0) = {}^kV''(l) = 0 \quad (\text{Verwölbungen frei}).$$

Auch in den Randbedingungen hat man die Analogie zur Technischen Biegelehre und Wölbkrafttorsion.

6. Theorie II. Ordnung

Gerade bei der Theorie II. Ordnung kommt einem die eindimensionale Darstellungsweise für die Faltwerksberechnung sehr zugute. In diesem Abschnitt soll daher ein kleiner Ausblick auf die Möglichkeiten gegeben werden.

Wie gewohnt wird das Gleichgewicht am verformten System aufgestellt. Hier wird zur Erläuterung nur die Scheibe i betrachtet. Bild 11 zeigt die Änderung der Verformung der Scheibe i in z -Richtung. Der Querschnitt bei $z + dz$ hat sich gegenüber dem Querschnitt bei z um ${}^k f_{Li}' \cdot dz$ in Richtung der Scheibe, ${}^k f_{Qi}' \cdot dz$ rechtwinklig dazu verschoben und um ${}^k \vartheta_i' \cdot dz$ verdreht. Zerlegt man nun die auf dem Querschnitt stehende Normalspannung in eine Komponente in Richtung der verformten Faser und in eine Komponente rechtwinklig zur unverformten Scheibenebene, so erhält man für den „Querschnittsrahmen“ eine Belastung, die der Verschiebung jedes Querschnittspunktes multipliziert mit der auf ihm

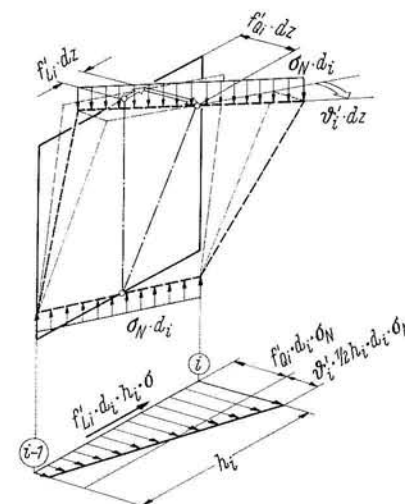


Bild 11. Beanspruchungen am Scheibenelement

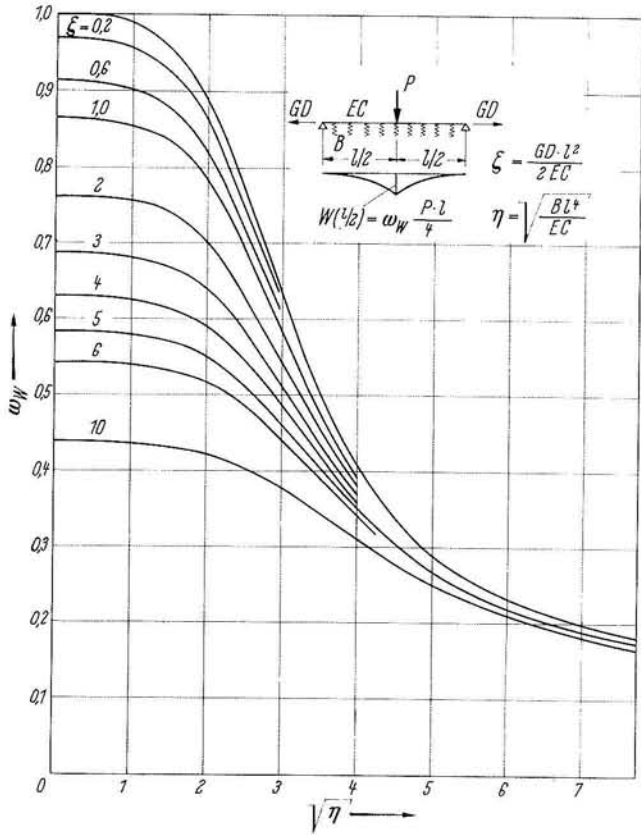


Bild 12. Hilfswerte ω_W zur Ermittlung des Wölbmomentes in Feldmitte infolge Einzellast in Feldmitte

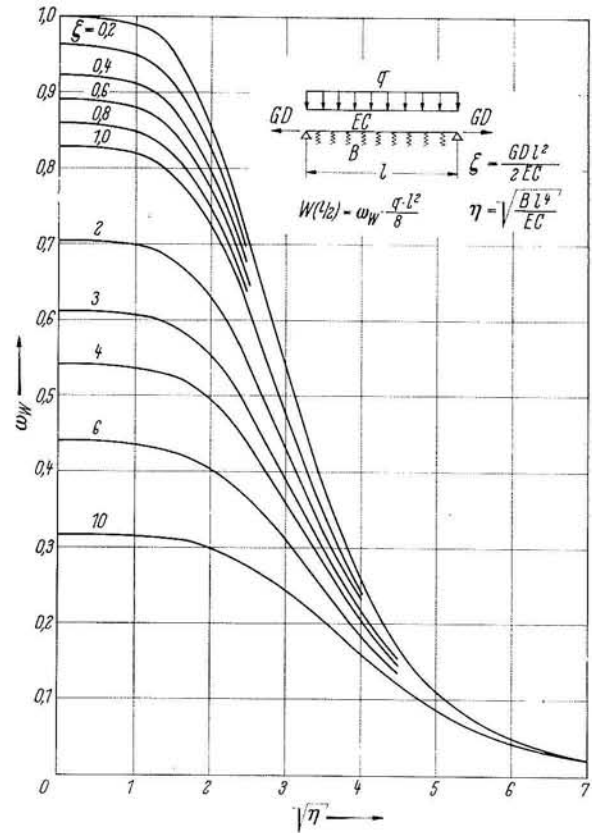


Bild 14. Hilfswerte ω_W zur Ermittlung des Wölbmomentes in Feldmitte infolge Gleichstreckenlast

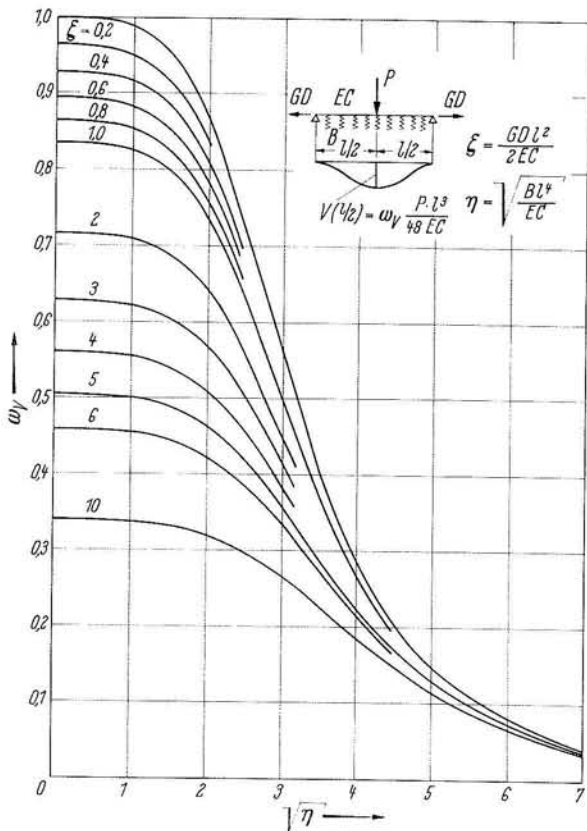


Bild 13. Hilfswerte ω_V zur Ermittlung der Verformung in Feldmitte infolge Einzellast in Feldmitte

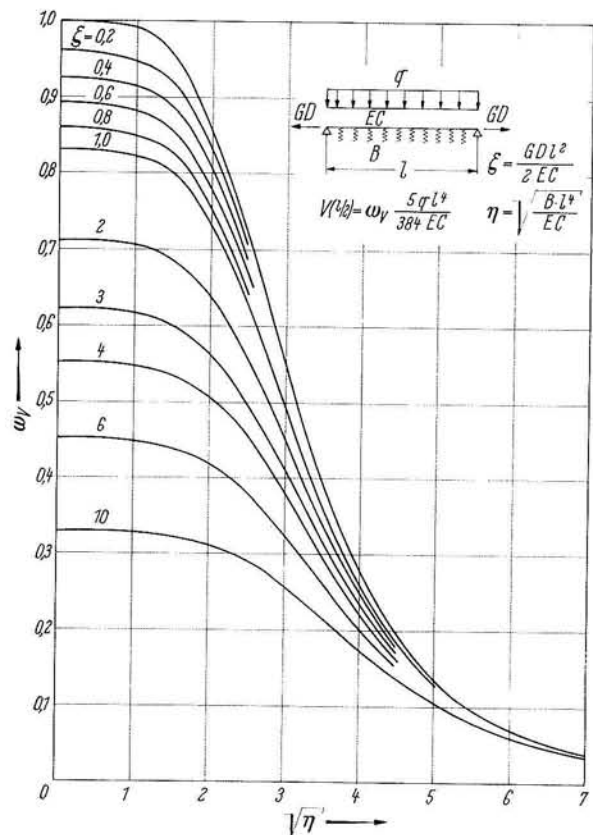


Bild 15. Hilfswerte ω_V zur Ermittlung der Verformung in Feldmitte infolge Gleichstreckenlast

stehenden Normalspannung gleich ist. Aus dieser Belastung ergeben sich Scheibenkräfte, die im allgemeinen zum Vektor k_{φ} nicht affin sind, sie enthalten auch Anteile der anderen Scheibenkraft-Vektoren. Diese Anteile erhält man mit einem der in Abschnitt 3.2 angegebenen Verfahren.

Für den Fall konstanter Normalspannungen im Querschnitt (Normalkraftbelastung N) werden diese Anteile $i k_n$ genannt. Sie geben die Belastungsgröße $i q$ für den Zustand i an, die die Normalkraft an der Verformung des Zustandes k erzeugt. In den „trivialen“ Fällen hat man als Beispiel hierfür das Biegedrillknicken: Die Normalkraft erzeugt an der Verformung v' ein Torsionsmoment von der Größe $\gamma_m \cdot N \cdot v'$ und entsprechend erzeugt sie an der Verformung ϑ' eine Querkraft von der Größe $\gamma_m \cdot N \cdot \vartheta'$.

Da v der Verformungsgröße 1V und ϑ der Verformungsgröße 3V entspricht, so erhält man also ${}^{13}n = {}^{31}n = \gamma_m$. Durch diese Koppelglieder ergibt sich wieder eine Abhängigkeit der Differentialgleichungen für die einzelnen Zustände k .

Für Gabellagerung (${}^kV(0) = {}^kV(l) = {}^kV''(0) = {}^kV''(l) = 0$) läßt sich die „Knick“-Bedingung durch einen Sinusansatz gewinnen, die dann auch das Beulverhalten mitbeschreibt.

7. Beispiele

Zur leichteren Lösung der Differentialgleichung (29) sind in den Bildern 12 bis 15 Hilfswerte für den Balken auf zwei Stützen und die Lastfälle Einzellast in Feldmitte und Gleichstreckenlast angegeben.

7.1. Beispiel 1

Für das Falwerk mit dem im Bild 16 angegebenen Querschnitt werden zunächst die vollständigen Querschnittswerte ermittelt. Danach werden für den Lastfall Eigengewicht die Spannungen berechnet. Die Systemwerte sind in Tafel 1 zusammengestellt.

Tafel 1. Systemwerte

$n = 5$ $E = 2 \cdot 100\,000 \text{ [N/m}^2\text{]} \text{ (Beton)}$ $\mu = 0$ $l = 8 \text{ [m]}$			
Scheibe	$h \text{ [m]}$	$d \text{ [m]}$	$\alpha \text{ [}^\circ\text{]}$
1	1,0000	0,25	90
2	2,8284	0,12	45
3	2,5000	0,12	0
4	2,8284	0,12	-45
5	1,0000	0,25	-90

Als erstes kann man nun mit den Formeln (14) und (18) die Matrizen \mathfrak{T} und \mathfrak{S} aufstellen (Tafel 2 und 3).

Tafel 2. Matrix \mathfrak{T}

	0	1	2	3	4	5
1	-45,043	89,808	-102,600	85,361	-38,094	10,567
2	126,620	-271,710	357,750	-333,370	198,850	-77,859
3	-144,590	332,550	-488,700	488,700	-332,550	144,590
4	77,859	-198,580	333,370	-357,750	271,710	-126,620
5	-10,567	38,094	-85,361	102,600	-89,808	45,043
6	0	0	0	0	0	0

Tafel 3. Matrix \mathfrak{S}

	0	1	2	3	4	5
1	-0,0833	-0,0417	0	0	0	0
2	-0,35355	-0,67355	-0,16000	0	0	0
3	-0,31250	-0,73676	-0,67426	-0,12500	0	0
4	-0,35355	-0,83355	-0,90426	-0,74426	-0,16000	0
5	-0,12500	-0,29471	-0,31971	-0,31971	-0,25304	-0,04167
6	-0,12500	-0,29471	-0,31971	-0,31971	-0,29471	-0,12500

Da $n = 5$ ist, sind zwei Eigenwerte zu suchen. Es ist: ${}^0\bar{B} = {}^1\bar{B} = {}^2\bar{B} = {}^3\bar{B} = 0$. Man findet: ${}^4\bar{B} = 1383,3$ und ${}^5\bar{B} = 10\,185$. Die Eigenfunktionen sind so normiert, daß die Wölbwiderstände gleich 1 werden. Dann ist ${}^iB = {}^i\bar{B}$. In der folgenden Tafel 4 sind in Verbindung mit Bild 17 die Wölbordinaten, die Verformungskomponenten, die Scheibenkräfte und die Querbiegemomente angegeben.

Als nächstes werden die Schubkräfte aus der äußeren Last gebraucht. Dazu muß man den „Querschnittsrahmen“ statisch unbestimmt rechnen. Bei unverschieblichen Kanten erhält man die in Bild 18 dargestellte Querbiegemomenteinfläche und die Scheibenlasten $q_1 = -q_5 = -0,92076$, $q_2 = -q_4 = -1,0742$ und $q_3 = 0$.

Tafel 4. Beispiel 1. Ergebnisse der allgemeinen Rechnung

$k = 1$						
		${}^1B = 0$	${}^1C = I_1 = 9,1003 \text{ [m}^4\text{]}$	${}^1D = 0$		
i	k_{φ_i}	$k_{f_{Li}}$	$k_{f_{Qi}}$	k_{ϑ_i}	k_{S_i}	k_{m_i}
0	3,2500	0	1,0000	0	0,0446	
1	3,2500	0	1,0000	0	0,3888	0
2	1,2500	0,7071	0,7071	0	0,4502	0
3	-1,2500	1,0000	0	0	0,3888	0
4	-3,2500	0,7071	-0,7071	0	0,0446	0
5	-3,2500	0	-1,0000	0		
$k = 2$						
		${}^1B = 0$	${}^1C = I_2 = 1,5560 \text{ [m}^4\text{]}$	${}^1D = 0$		
i	k_{φ_i}	$k_{f_{Li}}$	$k_{f_{Qi}}$	k_{ϑ_i}	k_{S_i}	k_{m_i}
0	-1,6957	-1,0000	0	0	-0,1223	
1	-0,6957	-0,7071	0,7071	0	-0,5523	0
2	1,3043	0	1,0000	0	0	0
3	1,3043	0,7071	0,7071	0	0,5523	0
4	0,6957	1,0000	0	0	0,1223	
5	1,6957					
$k = 3$						
		${}^3B = 0$	${}^3C = C_M = 1,6675$	${}^3D = I_D = 0,1092$		
i	k_{φ_i}	$k_{f_{Li}}$	$k_{f_{Qi}}$	k_{ϑ_i}	k_{S_i}	k_{m_i}
0	-2,5733	-3,2500	3,4772	-1	-0,1117	
1	0,6767	-0,1927	2,9893	-1	-0,1550	0
2	1,2218	0,9775	0	-1	0,2192	0
3	-1,2218	-0,1927	-2,9893	-1	-0,1550	
4	-0,6767	-3,2500	-3,4772	-1	-0,1117	
5	2,5733					
$k = 4$						
		${}^4B = 1383,2$	${}^4C = 1$	${}^4D = 1,9543 \text{ [m}^2\text{]}$		
i	k_{φ_i}	$k_{f_{Li}}$	$k_{f_{Qi}}$	k_{ϑ_i}	k_{S_i}	k_{m_i}
0	2,0593	3,4985		2,7208	0,1164	
1	-1,4392	-0,6932	-2,4739	2,2394	0,1579	308,82
2	0,5214	0	0,9803	0	0	308,82
3	0,5214	0,6932	-2,4739	-2,2394	-0,1579	
4	-1,4392	-3,4985		-2,7208	-0,1164	
5	2,0593					
$k = 5$						
		${}^5B = 10\,184$	${}^5C = 1 \text{ [m}^4\text{]}$	${}^5D = 1,9543 \text{ [m}^2\text{]}$		
i	k_{φ_i}	$k_{f_{Li}}$	$k_{f_{Qi}}$	k_{ϑ_i}	k_{S_i}	k_{m_i}
0	-1,2919	-2,6220		-4,3061	-0,0522	
1	1,3301	1,0161	0,9807	-2,6470	0,1921	-1064,3
2	-1,5438	-1,2351	0	2,1376	-0,2717	1064,3
3	1,5438	1,0161	-0,9807	-2,6470	0,1921	
4	-1,3301	-2,6220		-4,3061	-0,0522	
5	1,2919					

Durch Multiplikation mit den $k_{f_{Li}}$ -Werten erhält man die Belastungsergebnisse

$${}^2q = 2 \cdot (0,92076 \cdot 1 + 1,2074 \cdot 0,7071) = 3,5491$$

$${}^4q = 2 \cdot (0,92076 \cdot 3,4985 - 1,0742 \cdot 0,6932) = 4,7686$$

Als Kontrolle muß sich für 2q die Resultierende des Gewichts ergeben.

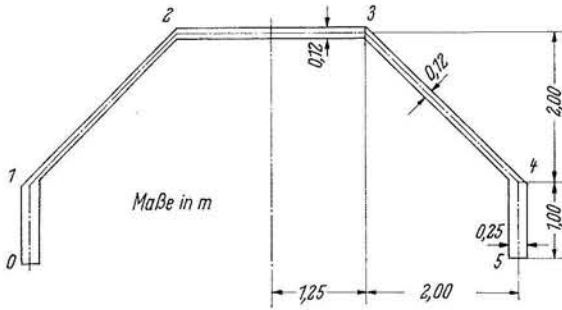
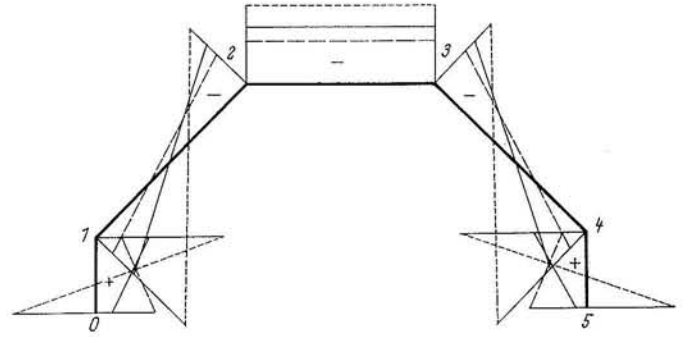


Bild 16. Querschnitt für das Faltwerk des Beispiels 1



Spannungen bei $z = l/2$ — biegesteifes Faltwerk ($\Sigma \sigma_{(D)}$)
 — "Balkentheorie" (${}^2\sigma$) — drillweiches Faltwerk ($\Sigma \sigma_{(D=0)} \approx$ Gelenkfaltwerk)

Bild 19. Spannungsverteilung in Feldmitte (siehe Tafel 5)

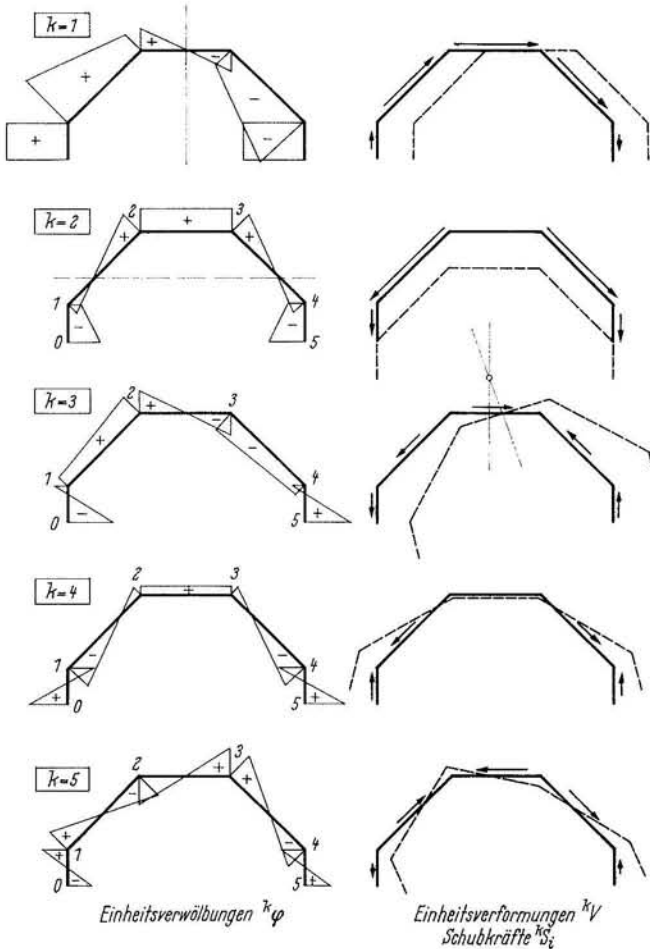


Bild 17. Verwölbungen, Schubkräfte und Verformungen in den Einheitszuständen

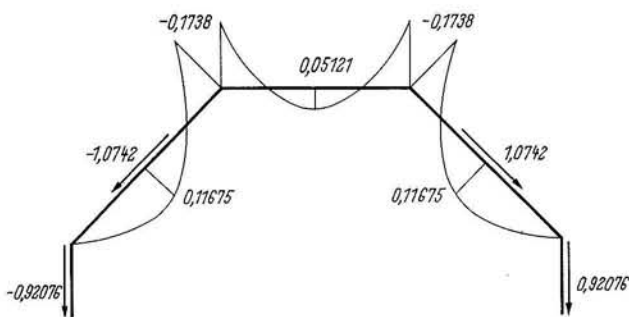


Bild 18. Schubkräfte und Querbiegemomente bei unverschieblichen Kanten in [Mp] und [Mpm]

Die benötigten Steifigkeitswerte sind

$$\left. \begin{aligned} {}^2\xi = 0 \\ {}^2\eta = 0 \end{aligned} \right\} \text{daraus } {}^2\omega_W = 1$$

$$\left. \begin{aligned} {}^4\xi = \frac{10^6 \cdot 0,7673 \cdot 8^2}{2 \cdot 2,1 \cdot 10^6} = 12 \\ {}^4\eta = 64 \sqrt{\frac{1383,2}{2,1 \cdot 10^6}} = 1,64 \end{aligned} \right\} \text{daraus } {}^4\omega_W = 0,295.$$

Für das Biegemoment (2. Wölbmoment) gilt wie bekannt

$${}^2W(1/2) = \frac{3,5491 \cdot 8^2}{8} = 28,393 \text{ Mpm.}$$

Mit dem aus der Kurventafel (Bild 14) zu entnehmenden Hilfs-wert errechnet sich das 4. Wölbmoment in Feldmitte zu

$${}^4W(1/2) = 0,295 \cdot \frac{4,7686 \cdot 8^2}{8} = 11,254 \text{ Mpm.}$$

Vernachlässigen wir den Drillwiderstand (${}^4D = 0$), so wird mit ${}^4\xi = 0$ und mit ${}^4\omega_W = 0,99$

$${}^4W(1/2) = 0,99 \cdot \frac{4,7686 \cdot 8^2}{8} = 37,57 \text{ Mpm.}$$

Der Unterschied zum Gelenkfaltwerk (${}^4\omega_W = 1$) ist dann nur unbedeutend. Er wird erst bei größerer Länge spürbar.

Die Spannungen werden nach der Formel (26) ermittelt und sind in der Tafel 5 und im Bild 19 dargestellt.

Tafel 5. Spannungen zum Beispiel 1 in [Mp/m²] (siehe Bild 19)

$i \setminus k_\sigma$	${}^2\sigma$	${}^4\sigma(D)$	${}^4\sigma(D=0)$	$\Sigma \sigma(D)$	$\Sigma \sigma(D=0)$
0	30,942	- 23,175	- 77,774	7,767	- 46,832
1	12,650	16,196	54,355	28,846	67,005
2	- 23,716	- 5,868	- 19,692	- 29,584	- 43,408
3	- 23,716	- 5,868	- 19,692	- 29,584	- 43,408
4	12,650	16,196	54,355	28,846	67,005
5	30,942	- 23,175	- 77,774	7,767	- 46,832

Bei diesem Querschnitt, bei dem es nur eine symmetrische und eine antisymmetrische „höhere Schnittgröße“ gibt, kann man die Wölb-ordinaten für $k = 4$ und $k = 5$ auch dadurch gewinnen, daß man die Orthogonalitätsbeziehung $\int^i \varphi \cdot {}^k \varphi \, dF = 0$ benutzt. Wegen der Symmetrie des Querschnitts sind die Wölbflächen durch drei Ord-naten $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ bestimmt. Von den gesuchten Wölbflächen kann man eine Ordinate willkürlich wählen (z. B. ${}^k \varphi_0 = 1$). Dann stehen in der Orthogonalitätsbedingung nur noch die beiden Unbekannten ${}^k \varphi_1$ und ${}^k \varphi_2$. Für $k = 4$ genügen die beiden Gleichungen

$$\int^0 \varphi_i \cdot {}^4 \varphi_i \cdot dF = 0 \quad \text{und} \quad \int^2 \varphi_i \cdot {}^4 \varphi_i \cdot dF = 0$$

zur Festlegung der ${}^4 \varphi$ -Fläche. Die ${}^0 \varphi_i$ sind die Verformungen der Normalkraft und daher alle gleich groß, die ${}^2 \varphi_i$ sind die Wölb-ordinaten bei Neigung des Querschnitts um die x -Achse. Für $k = 5$ verfährt man ebenso, indem man mit den bekannten antisymmetrischen Wölbflächen ${}^1 \varphi_i$ (Neigung des Querschnitts um die y -Achse) und ${}^3 \varphi_i$ (Einheitsverwölbung infolge $\vartheta' = 1$) orthogonalisiert.

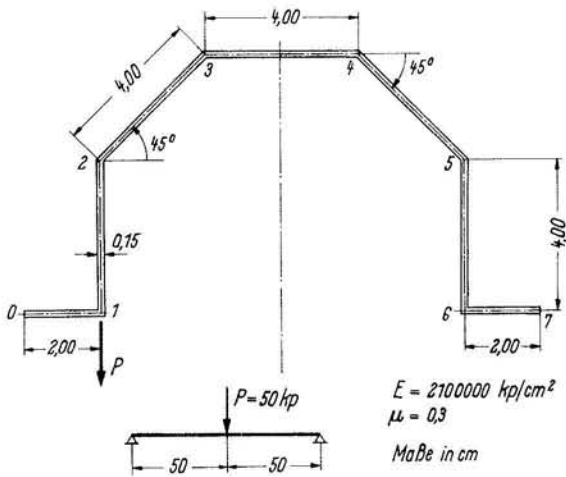


Bild 20. Querschnitt für das Falzwerk des Beispiels 2

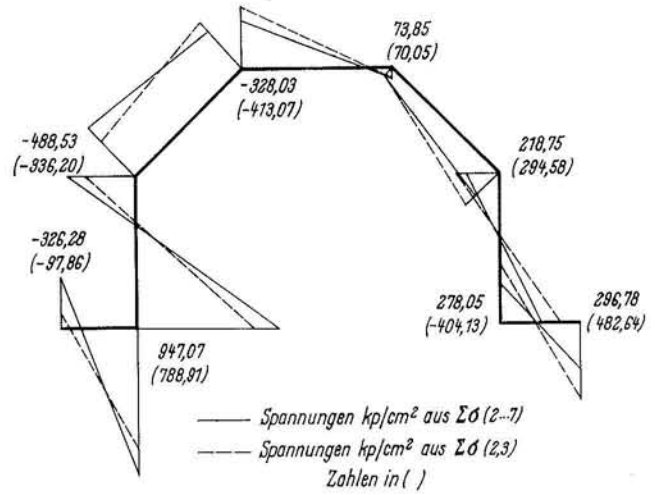


Bild 21. Spannungsverteilung in Feldmitte

7.2. Beispiel 2

Als Beispiel 2 betrachten wir einen Abkantquerschnitt, der in der linken Stegebene durch eine Einzellast belastet ist. Den Querschnitt mit seinen Abmessungen und der Lastanordnung zeigt Bild 20. Die Ergebnisse der allgemeinen Rechnung und der Span-

nungsermittlung sind in den Tafeln 6 bis 8 zusammengefaßt. An den Spannungsanteilen der 4. bis 7. Schnittgröße erkennt man, daß die übliche Rechnung mit Biegung und Wölbkrafttorsion $^2\sigma$ und $^3\sigma$ (letzte Spalte der Tafel 8) den Spannungszustand nur unzureichend beschreibt. Bild 21 zeigt die Spannungsverteilung im Mittelquerschnitt.

Tafel 6. Beispiel 2. Wölbordinaten k_{φ_i}

$i \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7
0	- 6,8284	- 3,6095	6,1436	2,0761	- 2,1117	0,5992	- 0,0384
1	- 4,8284	- 3,6095	- 12,6264	- 1,0042	0,4196	0,4109	- 0,3739
2	- 4,8284	0,3905	6,6873	0,3208	0,2612	- 1,0334	0,8405
3	- 2,0000	3,2190	5,1131	- 0,0867	0,2913	0,5754	- 1,2116
4	2,0000	3,2190	- 5,1131	- 0,0867	- 0,2913	0,5754	1,2116
5	4,8284	0,3905	- 6,6873	0,3208	- 0,2612	- 1,0334	- 0,8405
6	4,8284	- 3,6095	12,2626	- 1,0042	- 0,4196	0,4109	0,3739
7	6,8284	- 3,6095	- 6,1436	2,0761	2,1117	0,5992	0,0384

Schrifttum

- [1] Ehlers, G.: Die Spannungsermittlung in Flächentragwerken. Beton u. Eisen 29 (1930), H. 15, S. 281.
- [2] Craemer, H.: Allgemeine Theorie der Falzwerke. Beton u. Eisen 29 (1930), H. 15, S. 276.
- [3] Grüning, G.: Die Nebenspannungen der prismatischen Falzwerke. Ing.-Arch. 3 (1932), H. 4, S. 319.
- [4] Gruber, E.: Berechnung prismatischer Scheibenwerke. IVBH Abh. 1 (1932), S. 225.
- [5] Girkmann, K.: Flächentragwerke. Wien: Springer Verlag 1963.
- [6] Flügge, W.: Statik und Dynamik der Schalen. Berlin: Springer Verlag 1957.
- [7] Lundgreen, H.: Cylindrical Shells. Bd. I. Copenhagen: The Danish Technical Press 1951.
- [8] Hetenyi, M.: Beams on elastic Foundation. The University of Michigan Press. Scientific Series. Vol. XVI.

Tafel 7. Beispiel 2. Steifigkeits- und Belastungswerte, Schnittgrößen

k	B	C	D	ξ	η	ω_W	$k_{I/L2}$	$-P_2 \cdot k_{I/L2}$	$k_{\bar{W}} = \frac{Pl}{4}$	$k_W (1/2)$
2	0	23,451	0	0	0	1	- 1	50	1250	1250
3	0	119,06	0,0269	0	0	0,932	- 4,8284	241,42	6035,5	5624,9
4	13,133	1	0,00125	2,416	25,007	0,282	- 0,3036	15,18	414,1	117,0
5	32,366	1	0,00147	2,83	39,2	0,215	0,3611	- 18,05	- 49,49	- 10,64
6	258,902	1	0,00238	4,597	111,03	0,132	0,3611	- 18,05	- 451,34	- 59,58
7	1778,86	1	0,00675	13,03	291,22	0,082	- 0,3036	15,18	379,5	30,97

Tafel 8. Beispiel 2. Spannungsanteile und Spannungssummen

$k =$	2	3	4	5	6	7	Σ symmetr.	Σ antim.	$\Sigma 2 - 7$	$\Sigma 2, 3$
0	192,39	- 290,25	- 242,84	- 22,47	35,70	1,19	- 14,75	- 311,53	- 326,28	- 97,86
1	192,39	596,52	117,64	4,46	24,48	11,58	334,51	612,56	947,07	788,91
2	- 20,81	- 315,39	- 37,52	2,78	- 61,56	- 26,03	- 119,89	- 338,64	- 488,53	- 336,20
3	- 171,51	- 241,56	10,14	3,10	34,28	37,52	- 127,09	- 200,94	- 328,03	- 413,07
4	- 171,51	241,56	10,14	- 3,10	34,28	- 37,52	- 127,09	200,94	73,85	70,05
5	- 20,81	315,39	- 37,52	- 2,78	- 61,56	26,03	- 119,89	338,64	218,75	294,58
6	192,39	- 596,52	117,64	- 4,46	24,48	- 11,58	334,51	- 612,56	- 278,05	- 404,13
7	192,39	290,25	- 242,84	22,47	35,70	- 1,19	- 14,75	311,53	296,78	482,64