

Matthias Kraus/ Rolf Kindmann

Finite-Elemente-Methoden im Stahlbau

- **Anwendung der FEM – ohne Fehler bei Modellbildung und Ergebnisinterpretation**
- **mit praxisnahen Hinweisen auf häufige Fehlerquellen**
- **Aufwand minimieren und die Vorteile richtig nutzen**

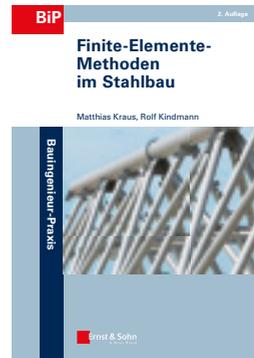
Die Finite-Elemente-Methode (FEM) ist ein Standardverfahren zur Berechnung von Tragwerken. Für praktisch tätige Ingenieure und Studierende gleichermaßen werden alle notwendigen Berechnungen für die Bemessung auf Grundlage der europäischen Normen (EC 3) anschaulich dargestellt.

BESTELLEN

+49 (0)30 470 31-236

marketing@ernst-und-sohn.de

www.ernst-und-sohn.de/3149



2. Auflage · 2019 · 504 Seiten ·
333 Abbildungen · 65 Tabellen

Softcover

ISBN 978-3-433-03149-0 € 59,-*

eBundle (Print + ePDF)

ISBN 978-3-433-03435-4 € 79,-*

ÜBER DAS BUCH

Die Finite-Elemente-Methode (FEM) wird seit vielen Jahren im Stahlbau als Standardverfahren zur Berechnung und Bemessung von Tragwerken benutzt. Nach einer Einführung in die Methodik und Erläuterungen zum Verständnis konzentriert sich das Buch auf die Ermittlung von Schnittgrößen, Verformungen, Verzweigungslasten und Eigenformen für Stahlkonstruktionen. Neben linearen Berechnungen für Tragwerke bilden die Stabilitätsfälle Biegeknicken, Biegedrillknicken und Plattenbeulen mit der Ermittlung von Verzweigungslasten und Berechnungen nach Theorie II. Ordnung wichtige Schwerpunkte. Hinzu kommt die Untersuchung von Querschnitten, für die Berechnungen mit der FEM zukünftig stark an Bedeutung gewinnen werden.

Für praktisch tätige Ingenieure und Studierende gleichermaßen werden alle notwendigen Berechnungen für die Bemessung von Tragwerken auf Grundlage der europäischen Normen (Eurocode 3) anschaulich dargestellt. Dabei wird auch die Ermittlung der Grenztragfähigkeit stabilitätsgefährdeter Stützen und Träger nach der Fließzonentheorie eingehend behandelt, da zu erwarten ist, dass diese Berechnungsmethode zukünftig vermehrt in der Baupraxis verwendet werden wird. Darüber hinaus wurden für die 2. Auflage insbesondere die Berechnungsbeispiele ergänzt und vertieft.

BESTELLUNG

Anzahl	ISBN /	Titel	Preis
	978-3-433-03149-0	Finite-Elemente-Methoden im Stahlbau	€ 59,-*
	978-3-433-03435-4	Finite-Elemente-Methoden im Stahlbau (Print + ePDF)	€ 99*

Privat

Geschäftlich

Bitte richten Sie Ihre Bestellung an:

Tel. +49 (0)30 47031-236

Fax +49 (0)30 47031-240

marketing@ernst-und-sohn.de

Firma, Abteilung

UST-ID Nr.

Name, Vorname

Telefon

Fax

Straße, Nr.

PLZ/Ort/Land

E-Mail

Datum/Unterschrift

www.ernst-und-sohn.

Vorwort zur 2. Auflage

Die Erstauflage aus dem Jahre 2007 wurde vollständig überarbeitet und dem Stand der Technik entsprechend aktualisiert. Alle Berechnungsbeispiele wurden an die Bemessungsregeln der europäischen Normen, d. h. an DIN EN 1993-1-1 und DIN EN 1993-1-5, angepasst. Darüber hinaus wurde der Umfang des Buches mit über 100 Seiten beträchtlich erweitert. Die Erweiterungen betreffen im Wesentlichen Folgendes:

- Zusätzliche Berechnungsbeispiele in Kapitel 5 zur Stabilität von Stäben und Stabwerken mit ausführlichen Erläuterungen zum Nachweis ausreichender Querschnittstragfähigkeit im Abschnitt 5.1.2
- Erläuterungen zu den Nachweisen nach DIN EN 1993-1-5 zum Plattenbeulen mit zahlreichen Hinweisen zum Verständnis sowie Ergänzung und Vertiefung der Berechnungsbeispiele in Kapitel 6 zum Beulen von Platten
- Neues Kapitel 10 „FEM für nichtlineare Berechnungen von Stäben nach der Fließzonentheorie“ mit zahlreichen Berechnungsbeispielen zum Biegeknicken und Biegedrillknicken von Stützen und Trägern
- Neues Kapitel 11 „Grundlagen zur Beschreibung des plastischen Materialverhaltens“

Die Verfasser danken Herrn M. Sc. *Silvio Mämpel*, Frau M. Sc. *Christin Sirtl*, Herrn Dipl.-Ing. *Björn Wittor* und Frau Dipl.-Ing. *Idna Wudtke* der Professur Stahl- und Hybridbau für die wertvollen Anregungen, Vorschläge und Kontrollen. Aktuelle Hinweise zum Buch werden unter www.kindmann.de und www.uni-weimar.de/stahl-hybrid bekannt gegeben.

Weimar/Dortmund, Oktober 2019

M. Kraus, R. Kindmann

Vorwort zur 1. Auflage

Für die Untersuchung von Tragwerken des Bauwesens hat sich die Methode der finiten Elemente (FEM) in den letzten 30 Jahren allgemein durchgesetzt. Möglich wurde dies durch die stürmische Entwicklung der Computertechnologie und die gezielte Weiterentwicklung computerorientierter Berechnungsverfahren. Die FEM ist heutzutage eine universelle Berechnungsmethode, die jeder Statiker sicher beherrschen muss.

Das vorliegende Buch konzentriert sich auf **FE-Methoden** zur Ermittlung von Schnittgrößen, Verformungen, Verzweigungslasten (Eigenwerten) und Eigenformen für **Stahlkonstruktionen**. Neben linearen Berechnungen für **Tragwerke** bilden die Stabilitätsfälle Biegeknicke, Biegedrillknicke und Plattenbeulen im Hinblick auf Verzweigungslasten und Berechnungen nach Theorie II. Ordnung wichtige Schwerpunkte. Hinzu kommen FE-Methoden für die Untersuchung von Querschnitten, die zurzeit noch relativ selten zur Anwendung kommen, zukünftig aber sicherlich stark an Bedeutung gewinnen werden.

Das vorliegende Buch ist für Studierende an Fachhochschulen, Technischen Hochschulen und Universitäten sowie Ingenieure in der Baupraxis konzipiert. Es werden daher die Grundlagen der FEM behandelt, Finite Elemente für die Untersuchungen von Stahlkonstruktionen entwickelt und neben Erläuterungen zum Verständnis Anwendungshinweise gegeben. Darüber hinaus wird mit zahlreichen Berechnungsbeispielen die Lösung baupraktischer Aufgabenstellungen gezeigt und Folgendes vermittelt:

- Welche finiten Elemente eignen sich für die im Stahlbau vorkommenden Aufgabenstellungen?
- Was ist bei der Auswahl der Elemente und der FE-Modellierung im Hinblick auf normengerechte Nachweise zu beachten?
- Welche computerorientierten Verfahren eignen sich vorzugsweise für die Finite-Elemente-Methode zur Lösung von Gleichungen und zur Ermittlung von Eigenwerten und -formen?

Die Verfasser danken Herrn Dipl.-Ing. *Niebuhr* von der Ingenieursozietät Schürmann-Kindmann und Partner, Dortmund, sowie den Herren Dr.-Ing. *Wolf* und Dipl.-Ing. *Vette* für die wertvollen Anregungen und fachlichen Diskussionen. Ein besonderer Dank gilt Frau *Habel* für die druckfertige Erstellung des Manuskriptes und Herrn *Steinbach* für die Anfertigung der Bilder. Aktuelle Hinweise zum Buch werden unter www.kindmann.de, www.rub.de/stahlbau und www.skp-ing.de veröffentlicht.

Autoren

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Matthias Kraus

studierte Bauingenieurwesen an der Technischen Universität Darmstadt. Von 2001 bis 2010 war er am Lehrstuhl für Stahl- und Verbundbau der Ruhr-Universität Bochum tätig, zunächst als Wissenschaftlicher Mitarbeiter und nach der Promotion in 2005 in der Funktion des Oberingenieurs. Im Jahre 2010 wechselte er als Oberingenieur und Abteilungsleiter Tragwerksplanung zur Ingenieursozietät Schürmann – Kindmann und Partner in Dortmund und übernahm Lehraufträge an der Ruhr-Universität Bochum und der Vietnamese-German University in Ho-Chi-Minh Stadt. Im Jahre 2015 folgte er dem Ruf an die Bauhaus-Universität Weimar zum Lehrstuhlinhaber der Professur Stahl- und Hybridbau.

Univ.-Prof. em. Dr.-Ing. Rolf Kindmann

studierte Bauingenieurwesen an der Ruhr-Universität Bochum. Von 1974 bis 1989 war er für sechs Jahre als Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Ruhr-Universität Bochum und für zehn Jahre in verschiedenen Positionen bei Thyssen Engineering tätig, zuletzt als Hauptabteilungsleiter aller technischen Büros. Im Jahre 1990 wurde er zum Ordinarius des Lehrstuhls für Stahl- und Verbundbau an der Ruhr-Universität Bochum ernannt und im Jahre 1991 gründete er die Ingenieursozietät Schürmann – Kindmann und Partner SKP in Dortmund, in der er als Beratender Ingenieur, Prüfingenieur für Baustatik (Fachrichtungen Metall- und Massivbau) sowie als Gutachter wirkte. Seit Beendigung seiner Tätigkeit als Gesellschafter ist Herr Prof. Kindmann der Ingenieursozietät SKP weiterhin eng verbunden

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	V
Autoren	VII
1 Einleitung und Übersicht	1
1.1 Erforderliche Nachweise und Nachweisverfahren	1
1.2 Verfahren zur Schnittgrößenermittlung	2
1.3 Elementtypen und Anwendungsbereiche	4
1.4 Lineare und nichtlineare Berechnungen	6
1.5 Bezeichnungen und Annahmen	9
1.6 Grundlegende Beziehungen	15
1.7 Linearisierung	18
1.8 Software/Downloads	21
2 Grundlagen der FEM	22
2.1 Allgemeines	22
2.2 Grundideen und Methodik	22
2.3 Ablauf der Berechnungen	28
2.4 Gleichgewicht	30
2.4.1 Vorbemerkungen	30
2.4.2 Prinzip der virtuellen Arbeit	31
2.4.3 Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie	33
2.4.4 Differentialgleichungen	35
2.5 Ansatzfunktionen für die Verformungen	37
2.5.1 Grundsätzliches	37
2.5.2 Polynomfunktionen für Stabelemente	38
2.5.3 Trigonometrische und Hyperbelfunktionen für Stabelemente	41
2.5.4 Ansatzfunktionen für das Plattenbeulen	46
2.5.5 Eindimensionale Funktionen für Querschnitte	50
2.5.6 Zweidimensionale Funktionen für Querschnitte	53
3 FEM für lineare Berechnungen von Stabtragwerken	58
3.1 Vorbemerkungen	58
3.2 Stabelemente für lineare Berechnungen	58
3.2.1 Verknüpfung der Verformungs- und Schnittgrößen	58
3.2.2 Normalkraftbeanspruchungen	60
3.2.3 Biegebeanspruchungen	63

3.2.4	Torsionsbeanspruchungen	66
3.2.5	Beliebige Beanspruchungen	70
3.3	Knotengleichgewicht im globalen Koordinatensystem	73
3.4	Bezugssysteme und Transformationen	76
3.4.1	Problemstellung	76
3.4.2	Stabelemente in der X-Z-Ebene	81
3.4.3	Stabelemente im räumlichen X-Y-Z-KOS	84
3.4.4	Lastgrößen	87
3.4.5	Verdrillung und Wölbmoment	89
3.4.6	Finite Elemente für beliebige Bezugssysteme	95
3.5	Gleichungssystem	96
3.5.1	Ziel	96
3.5.2	Gesamtsteifigkeitsmatrix	96
3.5.3	Gesamtlastvektor	98
3.5.4	Geometrische Randbedingungen	100
3.6	Berechnung der Verformungsgrößen	102
3.7	Ermittlung der Schnittgrößen	103
3.8	Ermittlung der Auflagerreaktionen	105
3.9	Einwirkungen/Lastgrößen	106
3.9.1	Einzellasten	106
3.9.2	Streckenlasten	106
3.9.3	Stützensenkungen	107
3.9.4	Temperatureinwirkungen	108
3.10	Federn und Schubfelder	109
3.11	Gelenke und Gelenkfedern	113
3.12	Einflusslinien	117
3.13	Übertragungsmatrizenverfahren	121
3.14	Schubweiche Stabelemente	126
4	FEM für nichtlineare Berechnungen von Stabtragwerken	133
4.1	Allgemeines	133
4.2	Gleichgewicht am verformten System	133
4.3	Ergänzung der virtuellen Arbeit	137
4.4	Knotengleichgewicht unter Berücksichtigung von Verformungen	143
4.5	Geometrische Steifigkeitsmatrix	145
4.6	Sonderfall: Biegung mit Druck- bzw. Zugnormalkraft	150
4.7	Vorverformungen und geometrische Ersatzimperfektionen	154
4.8	Berechnungen nach Theorie II. Ordnung und Nachweisschnittgrößen	158
4.9	Stabilitätsuntersuchungen/Verzweigungslasten	165
4.10	Eigenformen/Knickbiegelinien	167
4.11	Fließgelenktheorie	171

5	Anwendungsbeispiele für Stabtragwerke	175
5.1	Übersicht	175
5.1.1	Allgemeines	175
5.1.2	Nachweis ausreichender Querschnittstragfähigkeit	176
5.1.3	Stabilitätsnachweise für Stäbe	183
5.1.4	Auswahl der Elementtypen und -matrizen	187
5.1.5	Tragfähigkeitsmindernde Einflüsse	189
5.2	Träger	190
5.2.1	Vorbemerkungen	190
5.2.2	Einfeldträger mit Kragarm	190
5.2.3	Traglast eines Zweifeldträgers	193
5.2.4	Zweifeldträger mit elastischem Mittelaufleger	197
5.2.5	Träger mit planmäßiger Torsion	199
5.2.6	Kranbahnträger	201
5.3	Stützen und andere Druckstäbe	205
5.3.1	Vorbemerkungen	205
5.3.2	Elastisch eingespannte Rohrstütze	205
5.3.3	Stütze mit planmäßiger Biegung und drei Stabilitätsfällen	207
5.3.4	Giebelwandeckstütze	210
5.4	Fachwerke	214
5.4.1	Vorbemerkungen	214
5.4.2	Ebener Fachwerkbinder	214
5.4.3	Montagezustand des Torbinders einer Flugzeughalle	218
5.5	Rahmen und Stabwerke	220
5.5.1	Vorbemerkungen	220
5.5.2	Zweigenkrahmen mit Zwischenbühne	221
5.5.3	Rahmen unter Berücksichtigung von Anschlusssteifigkeiten	225
5.5.4	Haupttragwerk einer Stabbogenbrücke	231
5.5.5	Silodachkonstruktion	235
5.6	Trägerroste	239
5.6.1	Vorbemerkungen	239
5.6.2	Fahrbahn einer Stabbogenbrücke	240
6	FEM für ebene Flächentragwerke – Plattenbeulen	242
6.1	Scheiben und Platten	242
6.2	Spannungen und Schnittgrößen	242
6.3	Verschiebungsgrößen	244
6.4	Grundlegende Beziehungen	245
6.5	Prinzip der virtuellen Arbeit	247
6.6	Scheiben und Platten im Stahlbau	249

6.7	Steifigkeitsmatrix für ein Plattenelement	251
6.8	Geometrische Steifigkeitsmatrix für das Plattenbeulen	255
6.9	Längs- und querausgesteifte Platten	256
6.10	Plattenbeulnachweise nach DIN EN 1993-1-5	258
6.11	Berechnung von Beulspannungen und Beulflächen	264
6.12	Anwendungsbeispiele zum Plattenbeulen	271
6.12.1	Vorbemerkungen	271
6.12.2	Einzelfeld mit konstantem σ_x	271
6.12.3	Ein- und zweiwellige Beulflächen, gleiche Beulspannungen	274
6.12.4	Stegblech einer Verbundbrücke mit Schubbeanspruchung	276
6.12.5	Stegblech mit Biegebeanspruchung	277
6.12.6	Bodenblech mit Längssteife	279
6.12.7	Vollwandträgersteg mit Längssteifen	283
6.12.8	Veränderte Anordnung der Längssteifen	292
7	FEM für Stabquerschnitte	294
7.1	Aufgabenstellungen	294
7.2	Normierte Bezugssysteme und Querschnittskennwerte	296
7.3	Prinzip der virtuellen Arbeit	299
7.4	Eindimensionale Elemente für dünnwandige Querschnitte	304
7.4.1	Virtuelle Arbeit	304
7.4.2	Elementsteifigkeitsbeziehungen	306
7.4.3	Gleichungssysteme	309
7.4.4	Berechnungen der Querschnittswerte und Spannungen	311
7.4.5	Zusammenstellung	314
7.5	Zweidimensionale Elemente für dickwandige Querschnitte	315
7.5.1	Vorbemerkungen	315
7.5.2	Virtuelle Arbeit für dickwandige Querschnittselemente	317
7.5.3	Elementgeometrie	318
7.5.4	Transformationsbeziehungen	321
7.5.5	Steifigkeitsbeziehungen	323
7.5.6	Numerische Integration	325
7.5.7	Querschnittswerte und Spannungen	328
7.5.8	Güte der Näherungslösungen	329
7.5.9	Sonderfall: Rechteckige Elemente	331
7.6	Berechnungsablauf	335
7.7	Anwendungsbeispiele	337
7.7.1	Vorbemerkungen	337
7.7.2	Einzelliger Hohlkastenquerschnitt	337
7.7.3	Brückenquerschnitt mit Trapezsteifen	342
7.7.4	Rechteckiger Vollquerschnitt	345

7.7.5	Doppelsymmetrischer I-Querschnitt	351
7.7.6	Kranschiene	358
7.7.7	Numerische Erfassung des Schubverzerrungseinflusses auf die Normalspannungsverteilung	360
7.8	Schubkorrekturfaktoren	362
8	Gleichungssysteme	367
8.1	Problemstellung	367
8.2	Lösungsverfahren	368
8.3	<i>Gaußscher</i> Algorithmus	369
8.4	<i>Cholesky</i> -Verfahren	370
8.5	<i>Gaucho</i> -Verfahren	370
8.6	Berechnungsbeispiel	372
8.7	Ergänzende Hinweise	374
9	Lösung von Eigenwertproblemen	375
9.1	Problemstellung	375
9.2	Erläuterungen zum Verständnis	376
9.3	Matrizenzerlegungsverfahren	381
9.4	Inverse Vektoriteration	386
9.5	Kombination der Lösungsverfahren	392
10	FEM für nichtlineare Berechnungen von Stäben nach der Fließzonentheorie	395
10.1	Einführung	395
10.1.1	Vorbemerkungen	395
10.1.2	Grundlegende Einführungsbeispiele	395
10.2	Hinweise zu geometrisch nichtlinearen Berechnungen	398
10.3	Berücksichtigung der physikalischen Nichtlinearität	402
10.3.1	Vorbemerkungen	402
10.3.2	Einführungsbeispiel	402
10.3.3	Dehnungsiteration für σ_x -Schnittgrößen	406
10.4	Grundlagen und Annahmen für Berechnungen nach der Fließzonentheorie	413
10.4.1	Vorbemerkungen	413
10.4.2	Werkstoffgesetz	413
10.4.3	Imperfektionen	416
10.4.4	Zum Einfluss der Imperfektionen	420
10.5	Gleichgewicht	422
10.5.1	Inkrementelles Gleichungssystem nach Theorie II. Ordnung	422

10.5.2	Verallgemeinertes inkrementell-iteratives Verfahren	428
10.5.3	Bogenlängenverfahren	432
10.6	Steifigkeitsmatrix für Bauteile mit Fließzonen	434
10.7	Berechnungsbeispiele	438
10.7.1	Fließzonenberechnungen auf Grundlage von DIN EN 1993	438
10.7.2	Berechnungen mit dem Programm FE-STAB-FZ	439
10.7.3	Bauteile mit doppelsymmetrischen I-Querschnitten	440
10.7.4	Stütze HEA 140 mit Druckkraft und planmäßiger Biegung	443
10.7.5	Einfeldträger IPE 300 mit Druckkraft und planmäßiger Biegung	445
10.7.6	Stütze IPE 300 mit Einspannung am Stützenfuß	447
10.7.7	Einfeldträger IPE 450 mit Kragarm	449
10.7.8	Zweifeldriger Kranbahnträger HEB 300	451
10.7.9	Biegung und Torsion eines Versuchsträgers IPE 200	454
10.7.10	Zweiachsig außermittig belastete Versuchsstütze HEB 200	457
10.7.11	Auswirkungen von Fließzonen auf die Tragfähigkeit	461
11	Grundlagen zur Beschreibung des plastischen Materialverhaltens	465
11.1	Einleitung	465
11.2	Grundlegende mechanische Beziehungen	466
11.2.1	Spannungs- und Verzerrungstensor	466
11.2.2	Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen	469
11.3	Beschreibung der Plastizität	472
11.3.1	Fließkriterium	472
11.3.2	Verfestigungsregel	476
11.3.3	Fließregel	480
11.4	Hinweise zur Berücksichtigung der Plastizität in numerischen Berechnungen	486
	Literaturverzeichnis	489
	Stichwortverzeichnis	495

7 FEM für Stabquerschnitte

7.1 Aufgabenstellungen

Für die Berechnung von Stäben und Stabwerken hat sich die Methode der finiten Elemente allgemein durchgesetzt. Selbst für die Untersuchung einfacher, statisch bestimmter Systeme verwendet man die FEM, da sie mit geringem Aufwand schnell und sicher die Zustandsgrößen für die Nachweise einer statischen Berechnung liefert. Die Methode hat sich in diesem Bereich zur Standardmethode entwickelt, so dass es nahe liegt, sie auch bei anderen Problemstellungen, wie für die Untersuchung von Querschnitten, einzusetzen, worauf in diesem Kapitel eingegangen wird.

Um einen zweckmäßigen Anwendungsbereich der FEM für Querschnitte festzulegen ist es zunächst sinnvoll, die im Stahlbau vorkommenden Querschnittsformen zu klassifizieren. Wie in Bild 7.1 dargestellt, kann man folgende Einteilung vornehmen:

- a) dünnwandige, offene Querschnitte
- b) dünnwandige, geschlossene Querschnitte
- c) beliebige dickwandige Querschnitte

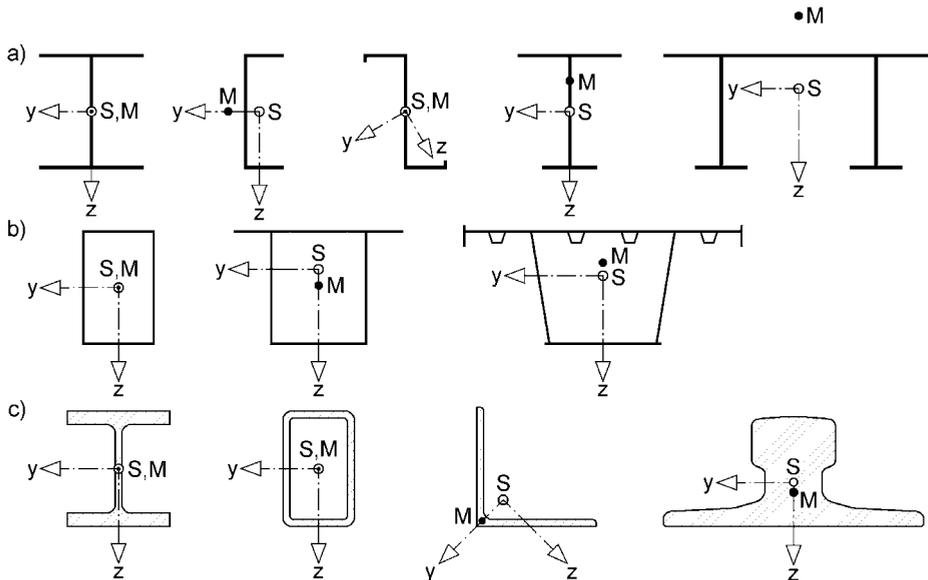


Bild 7.1 Zur Klassifizierung von Querschnitten

Als dünnwandig werden Querschnitte bezeichnet, wenn durch eine Reduzierung auf die Profilmittellinie und die Anwendung vereinfachter Theorien ausreichend genaue Berechnungsergebnisse erzielt werden, s. Bild 7.2 und Bild 2.17. Die Querschnitte setzen sich überwiegend aus rechteckigen Teilquerschnitten zusammen, wobei zwi-

schen offenen und geschlossenen Querschnittsformen unterschieden wird. Ab einem Verhältnis von etwa $\ell/t > 10$ werden Bleche als dünnwandig eingestuft, so dass Stahlquerschnitte mit den üblichen Blechabmessungen in der Regel als dünnwandig gelten.

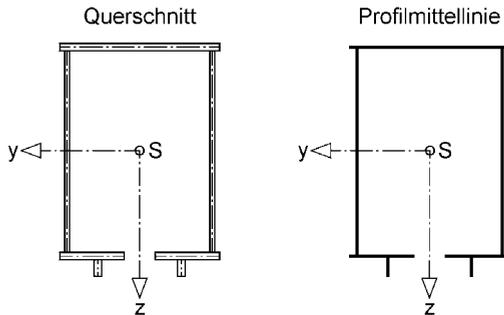


Bild 7.2 Beispiel für die Reduzierung eines Querschnitts auf die Profilmittellinie (H-Bahn)

In Ausnahmefällen ist es erforderlich, Querschnitte mit einer genaueren und aufwändigeren Theorie zu untersuchen. Hierbei handelt es sich um die Kategorie der beliebigen, dickwandigen Querschnitte. Beispiele hierfür sind Vollquerschnitte oder Walzprofile, wenn für diese genaue Lösungen erzielt werden sollen.

Die Untersuchung von Querschnitten ist mit verschiedenen Aufgabenstellungen verbunden. Tabelle 7.1 gibt im Hinblick auf die Anwendung der FEM einen Überblick. Dabei ist zu beachten, dass im Hoch- und Industriebau die plastische Querschnittstragfähigkeit von besonderem Interesse ist und im Brückenbau die Spannungsermittlung für große mehrteilige Querschnitte im Vordergrund steht.

Aus Tabelle 7.1 wird deutlich, dass bei dünnwandigen, offenen Querschnitten (Bild 7.1a) auf den Einsatz der FEM verzichtet werden kann. Bei dünnwandigen Hohlquerschnitten (Bild 7.1b) liegt bei der Berechnung der normierten Wölbordinate ω und der Schubspannungen ein statisch unbestimmtes Problem vor, dessen Lösung mit einem relativ großen Aufwand verbunden ist (s. [12]), so dass hier der Einsatz der FEM zweckmäßig ist. Für dickwandige Querschnitte (Bild 7.1c) existieren nur zu einigen grundlegenden Formen wie für Rechtecke, gleichseitige Dreiecke und Ellipsen analytische Lösungen zur Bestimmung von ω , τ_{xy} und τ_{xz} . Damit sind numerische Methoden wie die FEM für solche Querschnitte unumgänglich.

Im Übrigen können insbesondere dünnwandige Querschnitte mit der Methode der finiten Elemente ähnlich schnell und sicher wie Stäbe und Stabwerke untersucht werden. Aus diesem Grund ist davon auszugehen, dass sich die FEM auch in diesem Anwendungsbereich selbst bei einfachen Querschnitten als Standardmethode durchsetzen wird.

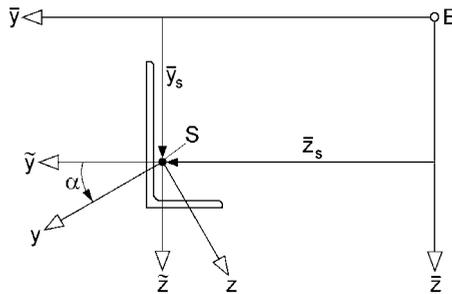
Tabelle 7.1 Aufgabenstellungen für die Untersuchung von Querschnitten

Aufgabenstellung	Berechnung mit oder ohne FEM?
① Normierte Bezugssysteme a) Lage des Schwerpunktes S, Hauptachsen y und z b) Lage des Schubmittelpunktes M, normierte Wölbordinate ω	FEM nicht erforderlich, Berechnung mit FE-Modellierung ist zweckmäßig. FEM zweckmäßig/erforderlich für geschlossene und dickwandige Querschnitte.
② Querschnittskennwerte a) Fläche A, Hauptträgheitsmomente I_y und I_z b) Wölbwiderstand I_ω , Torsionsträgheitsmoment I_T	FEM nicht erforderlich, Berechnung mit FE-Modellierung ist zweckmäßig. FEM zweckmäßig/erforderlich zur Berechnung der benötigten Wölbordinate ω .
③ Spannungen a) σ_x infolge N, M_y , und M_z b) σ_x infolge M_ω c) τ infolge V_y , V_z , M_{xp} und M_{xs}	FEM nicht erforderlich, Berechnung mit FE-Modellierung ist zweckmäßig. FEM zweckmäßig/erforderlich zur Berechnung der benötigten Wölbordinate ω FEM zweckmäßig/erforderlich für geschlossene und dickwandige Querschnitte.
④ Plastische Querschnittstragfähigkeit	Wird hier nicht behandelt, s. Abschn. 5.1.2

7.2 Normierte Bezugssysteme und Querschnittskennwerte

Für die Berechnung der Querschnittskennwerte gemäß Punkt ② in Tabelle 7.1 werden normierte Bezugssysteme gemäß Punkt ① benötigt. Sofern sie sich nicht aus Symmetriebedingungen ergeben, müssen sie rechnerisch bestimmt werden. Hier wird aus Gründen der Übersichtlichkeit wie in [12] in zwei Teile gegliedert:

- **Teil I: Bestimmung des y-z-Hauptachsensystems**
 - Lage des Schwerpunktes S (y_S , z_S)
 - Richtung der Hauptachsen (Winkel α)
 - Ordinaten im y-z-Hauptachsensystem
 - Querschnittskennwerte A, I_y , I_z
- **Teil II: Bestimmung des ω -Hauptsystems**
 - Lage des Schubmittelpunktes M (y_M , z_M)
 - Normierte Wölbordinate ω
 - Querschnittskennwerte I_ω , I_T

**Bild 7.3** Koordinatensysteme bei der Normierung Teil I

Für den **Teil I** der Querschnittsnormierung wählt man einen beliebigen Bezugspunkt B, der den Ursprung eines \bar{y} - \bar{z} -Bezugskordinatensystems darstellt. Mit den Bedingungen $A_y = A_z = 0$ können die Lage des Schwerpunktes S eines Querschnitts und ein zum \bar{y} - \bar{z} -System parallel verschobenes \tilde{y} - \tilde{z} -Koordinatensystem bestimmt werden. Dieses System hat gemäß Bild 7.3 seinen Ursprung im Schwerpunkt und durch die Erfüllung der Bedingung $A_{yz} = 0$ wird es um den Winkel α in das y - z -Hauptachsensystem gedreht, in dem die *Hauptträgheitsmomente* I_y und I_z bestimmt werden können. Tabelle 7.2 enthält eine Zusammenstellung der erforderlichen Berechnungen.

Tabelle 7.2 Berechnung normierter Querschnittswerte Teil I, [12]

- ① A , $A_{\bar{y}}$ und $A_{\bar{z}}$ im \bar{y} - \bar{z} -Koordinatensystem berechnen:

$$A = \int_A dA; \quad A_{\bar{y}} = \int_A \bar{y} \cdot dA; \quad A_{\bar{z}} = \int_A \bar{z} \cdot dA$$

- ② Lage des Schwerpunktes: $\bar{y}_S = A_{\bar{y}}/A$; $\bar{z}_S = A_{\bar{z}}/A$

- ③ Koordinaten transformieren: $\tilde{y} = \bar{y} - \bar{y}_S$; $\tilde{z} = \bar{z} - \bar{z}_S$

- ④ $A_{\tilde{y}\tilde{z}}$, $A_{\tilde{y}\tilde{y}}$ und $A_{\tilde{z}\tilde{z}}$ im \tilde{y} - \tilde{z} -Koordinatensystem berechnen:

$$A_{\tilde{y}\tilde{z}} = \int_A \tilde{y} \cdot \tilde{z} \cdot dA; \quad A_{\tilde{y}\tilde{y}} = \int_A \tilde{y}^2 \cdot dA; \quad A_{\tilde{z}\tilde{z}} = \int_A \tilde{z}^2 \cdot dA$$

- ⑤ Hauptachseneckwinkel α : $\alpha = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2 A_{\tilde{y}\tilde{z}}}{A_{\tilde{y}\tilde{y}} - A_{\tilde{z}\tilde{z}}} \right)$

- ⑥ Koordinaten transformieren: $y = \tilde{y} \cdot \cos \alpha + \tilde{z} \cdot \sin \alpha$
 $z = \tilde{z} \cdot \cos \alpha - \tilde{y} \cdot \sin \alpha$

- ⑦ Hauptträgheitsmomente I_y und I_z berechnen:

$$I_y = A_{zz} = \int_A z^2 \cdot dA; \quad I_z = A_{yy} = \int_A y^2 \cdot dA$$

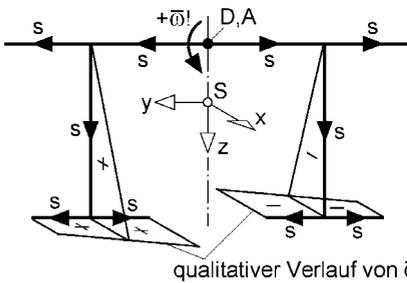
Berechnung von:

- A
- \bar{y}_S ; \bar{z}_S
- α
- y ; z
- I_y ; I_z

Bei der Berechnung normierter Querschnittswerte **Teil II** ist das vorrangige Ziel, die Lage des Schubmittelpunktes M zu berechnen. Da diese Lage nicht bekannt ist, muss zunächst ein Drehpunkt D gewählt werden, auf den sich die Wölbordinate $\bar{\omega}$ bezieht.

Bild 7.4 zeigt dazu ein Beispiel und darüber hinaus die Wahl des Integrationsanfangspunktes A sowie die Profilorinate s für jedes Querschnittsteil.

Die erforderlichen Berechnungen für die Normierung Teil II sind in Tabelle 7.3 zusammengestellt. Mit der Bedingung $A_{\bar{\omega}} = 0$ kann die Transformationskonstante $\bar{\omega}_k$ für die Wölbordinate ermittelt werden. Danach wird die Lage des Schubmittelpunktes bestimmt. Die Differenzen $y_M - y_D$ und $z_M - z_D$ kennzeichnen seine Lage bezüglich des angenommenen Drehpunktes D. Mit diesen Werten ergibt sich die Wölbordinate ω wie in Punkt © von Tabelle 7.3 angegeben. Sie dient zur Berechnung des Wölbwiderstandes I_ω und I_T , die bei computerorientierten Berechnungen in der Regel unter Verwendung der Gln. (7.30) und (7.33) bzw. (7.61) und (7.62) ermittelt werden.



D: beliebiger Drehpunkt
A: Integrationsanfangspunkt

Der dargestellte Drehsinn für $\bar{\omega}$ gibt Aufschluss über das Vorzeichen.

Bild 7.4 Ausgangspunkt für die Normierung Teil II

Tabelle 7.3 Berechnung normierter Querschnittswerte Teil II, [12]

- ① Voraussetzungen: A , I_y und I_z sind bekannt; y und z sind Hauptachsen
- ② $A_{\bar{\omega}}$, $A_{y\bar{\omega}}$, $A_{z\bar{\omega}}$ und $A_{\bar{\omega}^2}$ für einen beliebigen Integrationsanfangspunkt und

Drehpunkt D berechnen:

$$A_{\bar{\omega}} = \int_A \bar{\omega} \cdot dA; \quad A_{y\bar{\omega}} = \int_A y \cdot \bar{\omega} \cdot dA; \quad A_{z\bar{\omega}} = \int_A z \cdot \bar{\omega} \cdot dA; \quad A_{\bar{\omega}^2} = \int_A \bar{\omega}^2 \cdot dA$$

- ③ Transformationskonstante für die Wölbordinate:

$$\bar{\omega}_k = A_{\bar{\omega}} / A$$

- ④ Lage des Schubmittelpunktes:

$$y_M - y_D = \frac{A_{z\bar{\omega}}}{I_y}; \quad z_M - z_D = -\frac{A_{y\bar{\omega}}}{I_z}$$

- ⑤ Wölbwiderstand I_ω und Torsionsträgheitsmoment I_T :

$$I_\omega = \int_A \omega^2 \cdot dA = A_{\bar{\omega}\bar{\omega}} - \bar{\omega}_k^2 \cdot A - (y_M - y_D)^2 \cdot I_y - (z_M - z_D)^2 \cdot I_z$$

$$I_T = \int_A \left[\left(-\frac{\partial \omega}{\partial z} + (y - y_M) \right) \cdot (y - y_M) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + (z - z_M) \right) \cdot (z - z_M) \right] \cdot dA$$

- ⑥ Normierte Wölbordinate:

$$\omega = \bar{\omega} - \bar{\omega}_k - z \cdot (y_M - y_D) + y \cdot (z_M - z_D)$$

Berechnung von:

- $\bar{\omega}_k$
- y_M ; z_M
- ω
- I_ω ; I_T

Betrachtet man die Normierung im Hinblick auf die Anwendung der Methode der finiten Elemente, so zeigt sich, dass für den ersten Teil eine Untersuchung auf Basis der FEM nicht erforderlich ist. Für sämtliche Querschnittsformen können die Lage des Schwerpunktes, die Richtung der Hauptachsen sowie die Hauptträgheitsmomente problemlos ohne die FEM bestimmt werden. Aus diesem Grund wird in den folgenden Abschnitten stets davon ausgegangen, dass **Teil I der Normierung bereits abgeschlossen ist**.

Anmerkungen: Prinzipiell bietet es sich natürlich an, die mit der FEM verbundene Elementierung eines Querschnitts auch zur Bestimmung des y-z-Hauptachsensystems zu nutzen. Dazu müssen die in Tabelle 7.2 auftretenden Integrationen durchgeführt werden, was für dünnwandige Querschnitte in Anlehnung an Tabelle 7.4 erfolgen kann. Zur Berechnung der Hauptträgheitsmomente I_y und I_z mithilfe der FE-Elementierung kann die Formulierung für den Wölbwiderstand I_ω nach Gl. (7.30) entsprechend angepasst werden. Dies lässt sich problemlos durchführen, so dass eine weitere Vertiefung nicht erforderlich ist. Gleiches gilt für beliebige, dickwandige Querschnitte. Zur Durchführung der Normierung Teil I sowie der anschließenden Berechnung von Querschnittswerten wird auf Tabelle 7.8 und Gl. (7.61) verwiesen. Die Anpassung an die Integrationen des ersten Teils der Normierung ist problemlos möglich.

7.3 Prinzip der virtuellen Arbeit

Gemäß Abschnitt 2.4.2 ist die Bedingung

$$\delta W = \delta W_{\text{ext}} + \delta W_{\text{int}} = 0 \quad (7.1)$$

die allgemeine Forderung, dass Gleichgewicht vorhanden ist. Diese Bedingung wurde in den Kapiteln 3 und 4 für die Herleitung der **Stabelemente** verwendet und soll auch für die **Querschnittselemente** zum Einsatz kommen. Das Ziel ist die Formulierung von Steifigkeitsbeziehungen für Querschnittselemente, die der Gl. (3.1) für die lineare Stabtheorie entsprechen:

$$\underline{s}_e = \underline{K}_e \cdot \underline{v}_e - \underline{p}_e \quad (7.2)$$

Zunächst wird nur die **innere virtuelle Arbeit** betrachtet und später, im Zusammenhang mit den Querschnittselementen die **äußere virtuelle Arbeit** ergänzt.

Nach [12] lautet die innere virtuelle Arbeit unter Berücksichtigung von Normalspannung σ_x und Schubspannungen τ_{xy} sowie τ_{xz} für Stäbe:

$$\delta W_{\text{int}} = - \int \int_{x A} \left(\sigma_x \cdot \delta \varepsilon_x + \tau_{xy} \cdot \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \cdot \delta \gamma_{xz} \right) \cdot dA \cdot dx \quad (7.3)$$

Wölbordinate ω

Mit der Wölbordinate, auch Einheitsverwölbung genannt, werden die Verschiebungen u in Stablängsrichtung infolge Torsion beschrieben. Gemäß Gl. (1.1) ist

$$u(x, y, z) = -\omega(y, z) \cdot \vartheta'(x), \quad (7.4)$$

d. h. für eine Verdrillung $\vartheta' = -1$ ist $u = \omega$, so dass die Längsverschiebungen eines Querschnitts den Verwölbungen entsprechen. Die Wölbordinate gibt dabei den Verformungszustand der **primären Torsion** wieder, da die übrigen Schubspannungen im Rahmen der betrachteten Stabtheorie vernachlässigt wurden. Die entsprechende virtuelle Arbeit ist in Tabelle 2.2 zusammengestellt und das primäre Torsionsmoment $M_{xp} = GI_T \cdot \vartheta'$ kann aus Tabelle 2.3 abgelesen werden. Bild 7.5 zeigt beispielhaft die Verwölbungen für einen rechteckigen Vollquerschnitt und ein gewalztes I-Profil.

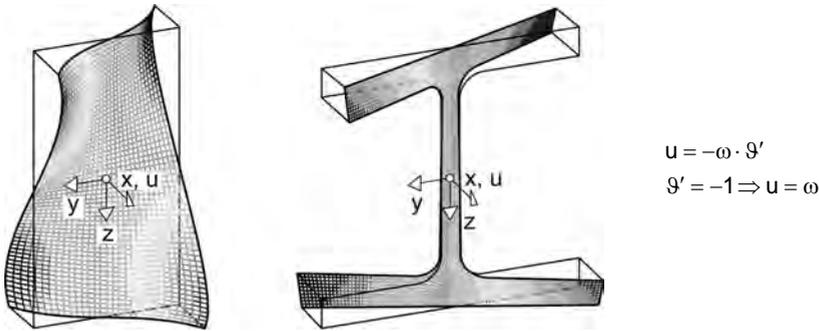


Bild 7.5 Verwölbungen infolge primärer Torsion für $\vartheta' = -1$

Bei der primären Torsion treten definitionsgemäß keine Normalspannungen auf, sondern ausschließlich Schubspannungen. In Gl. (7.3) kann daher $\sigma_x = 0$ gesetzt werden. Für die Schubanteile werden die Gln. (1.4d) und (1.4e)

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left[-(z - z_M) - \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] \cdot \vartheta' \quad (7.5a)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \left[(y - y_M) - \frac{\partial \omega}{\partial z} \right] \cdot \vartheta' \quad (7.5b)$$

verwendet. Die Gln. (7.5) enthalten bereits Umrechnungen mit den Gln. (1.1) bis (1.3), so dass die Terme auf der rechten Seite (mit den eckigen Klammern) für die Stabtheorie gelten. Da die virtuelle Arbeit bezüglich der Wölbordinate formuliert werden soll, wird $\vartheta' = -1$ gesetzt und die virtuellen Schubgleitungen ergeben sich wie folgt:

$$\delta \gamma_{xy} = \frac{\partial(\delta \omega)}{\partial y} \quad (7.6a)$$

$$\delta\gamma_{xz} = \frac{\partial(\delta\omega)}{\partial z} \tag{7.6b}$$

Die Schubspannungen werden mit dem Werkstoffgesetz, Gln. (1.6) und (1.7), durch die Schubleitungen ersetzt und man erhält:

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \tag{7.7a}$$

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} \tag{7.7b}$$

Mit $\sigma_x = 0$, den Gln. (7.5) bis (7.7) sowie $\vartheta' = -1$ kann Gl. (7.3) umgeformt werden und man erhält die folgende Formulierung für die innere virtuelle Arbeit:

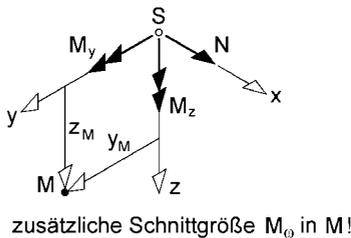
$$\delta W_{\text{int}} = -G \cdot \int_{A_e} \left(\frac{\partial(\delta\omega)}{\partial y} \cdot \left(\frac{\partial\omega}{\partial y} + (z - z_M) \right) + \frac{\partial(\delta\omega)}{\partial z} \cdot \left(\frac{\partial\omega}{\partial z} - (y - y_M) \right) \right) \cdot dA_e \tag{7.8}$$

Im Vergleich zu Gl. (7.3) wurde Gl. (7.8) auf die Querschnittsebene reduziert, weil die Verwölbung eines Querschnitts berechnet werden soll. Der Index „e“ kennzeichnet, dass ein Querschnittselement betrachtet wird. Gl. (7.8) wird in den Abschnitten 7.4 und 7.5 als Ausgangspunkt für die Herleitung finiter Querschnittselemente verwendet.

Schubverformungen u infolge Querkraft und sekundärer Torsion

Die innere virtuelle Arbeit in Gl. (7.3) soll so umgeformt werden, dass der Zusammenhang zwischen den Schnittgrößen V_y , V_z sowie M_{xs} und den korrespondierenden Verformungen in der Querschnittsebene hergestellt wird. Damit sollen finite Querschnittselemente hergeleitet werden, die die Berechnung der Verformungen infolge V_y , V_z und M_{xs} mithilfe der FEM ermöglichen. Das eigentliche Ziel ist aber die anschließende Ermittlung der Schubspannungen.

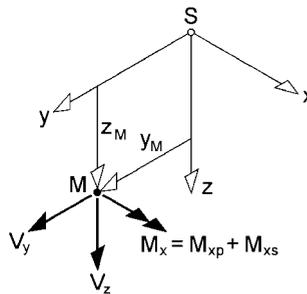
a) Schnittgrößen infolge σ_x



Spannungen:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y - \frac{M_\theta}{I_\theta} \cdot \omega$$

a) Schnittgrößen infolge τ



„Spannungsgleichgewicht“: $\frac{\partial\tau}{\partial s} = -\sigma'_x$

$$\sigma'_x = \frac{V_y}{I_z} \cdot y + \frac{V_z}{I_y} \cdot z + \frac{M_{xs}}{I_\theta} \cdot \omega$$

Bild 7.6 Zusammenhang zwischen den Spannungen σ_x und τ sowie den korrespondierenden Schnittgrößen

Bild 7.7 zeigt beispielhaft die mit der FEM ermittelten Verschiebungen u für einen rechteckigen Vollquerschnitt und ein gewalztes I-Profil. Mit den dargestellten Verläufen können die Schubspannungen berechnet werden, was in den Abschnitten 7.4 und 7.5 ausführlich gezeigt wird.

Zunächst wird der 1. Term in Gl. (7.3) mithilfe der *partiellen Integration* umgeformt. Mit Gl. (1.4a) ist $\delta\varepsilon_x = \delta u'$ und man erhält:

$$\int \int_{x A} \delta u' \cdot \sigma_x \cdot dA \cdot dx = \int \left(\left[\delta u \cdot \sigma_x \right]_{x=0}^{x=\ell} - \int_x \delta u \cdot \sigma_x' \cdot dx \right) \cdot dA \quad (7.9)$$

Die Umformung ist erforderlich, weil hier nicht die Normalspannungen σ_x berechnet werden sollen, sondern die Schubspannungen τ . Bild 7.6 zeigt den bekannten Zusammenhang zwischen den Spannungen und den Schnittgrößen. Die Ableitung der Normalspannung σ_x' ist daher gleich $-\partial\tau/\partial s$.

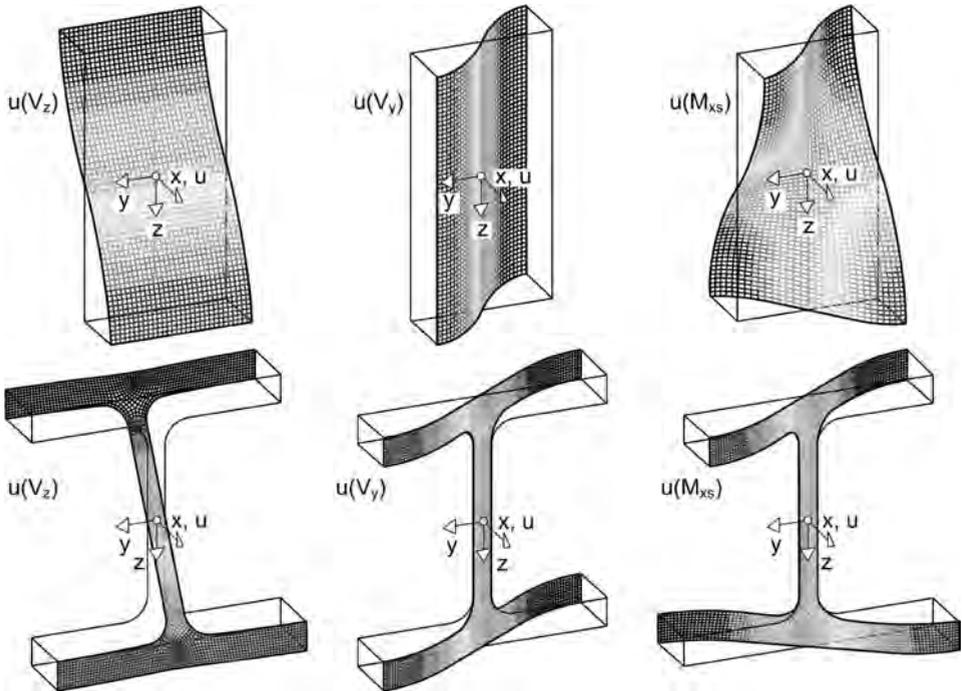


Bild 7.7 Schubverformungen u infolge von Querkräften und sekundärer Torsion

In Gl. (7.3) werden nun die Terme behandelt, die die Schubspannungen τ_{xy} und τ_{xz} enthalten. Nach wie vor gilt natürlich das Werkstoffgesetz $\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$ und $\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz}$, s. Gln. (7.7). Die Schubgleitungen in der Formulierung von Gl. (7.5) können hier jedoch nicht verwendet werden, weil sie auf Grundgleichungen der klas-