Probekapitel

Stahlbau – Teil 2: Stabilität und Theorie II. Ordnung

Autor: Rolf Kindmann

Copyright © 2008 Ernst & Sohn, Berlin

ISBN: 978-3-433-01836-1

Wilhelm Ernst & Sohn
Verlag für Architektur und
technische Wissenschaften
GmbH & Co. KG
Rotherstraße 21, 10245 Berlin
Deutschland
www.ernst-und-sohn.de

8 Theorie II. Ordnung für Biegung mit Normalkraft

8.1 Problemstellung und Ziele

Für die Nachweise mit dem Ersatzimperfektionsverfahren gemäß Kapitel 7 werden die Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung benötigt. Gelegentlich müssen auch die Verformungen nach Theorie II. Ordnung berechnet werden, beispielsweise dann, wenn entsprechende Gebrauchstauglichkeitsnachweise zu führen sind. Als Einführung in die Problemstellung wird zunächst die Stütze in Bild 8.1 betrachtet. Sie soll ideal gerade sein und senkrecht stehen, d. h. Imperfektionen werden hier nicht angenommen.

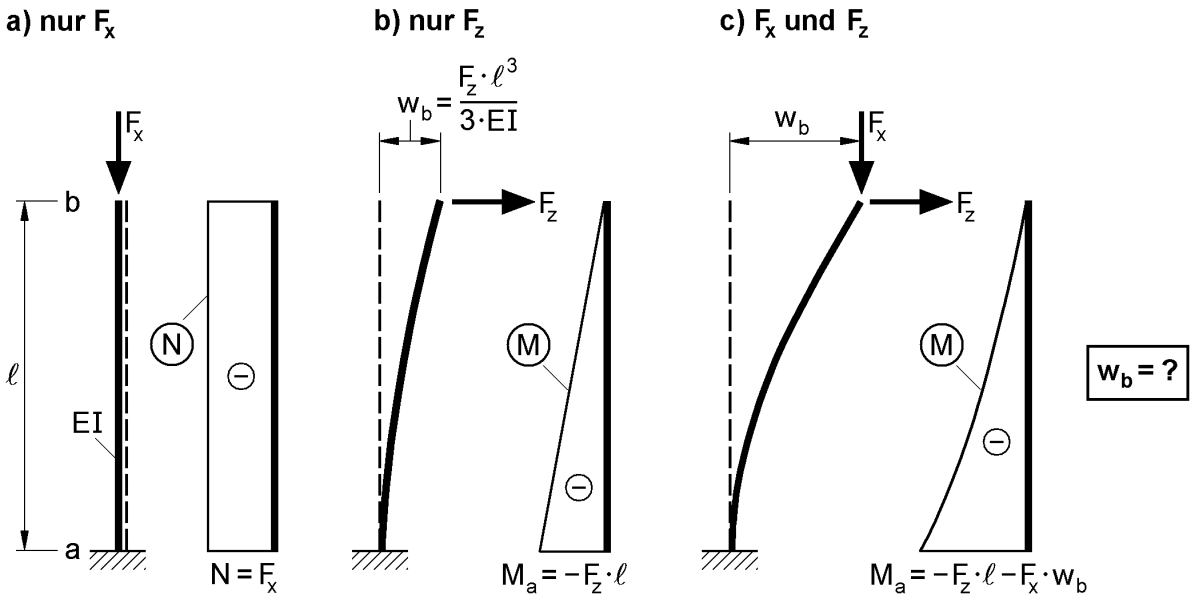


Bild 8.1 Prinzipieller Einfluss der Theorie II. Ordnung

In Bild 8.1a ist die Stütze nur durch F_x belastet und es tritt eine konstante Druckkraft $N = F_x$ auf. Bei der Belastung durch F_z, Bild 8.1b, entsteht ein linear veränderliches Biegemoment und die Verschiebungen w(x) mit dem Größtwert am Stützenkopf können problemlos mit den bekannten Methoden der Baustatik bestimmt werden. Wenn nun wie in Bild 8.1c F_x und F_z gemeinsam wirken, so ergibt sich unmittelbar aus der Anschauung, dass die horizontalen Verschiebungen in Bild 8.1b durch F_x größer werden. Ursache dafür ist der außermittige Lastangriff von F_x bezüglich der unverformten Stabachse am unverformten System. Dieser Effekt führt auch zu einer Veränderung der Biegemomente M(x) und an der Einspannstelle ist $M_a = -F_z \cdot \ell - F_x \cdot w_b$. Der Vergleich mit $M_a = -F_z \cdot \ell$ in Bild 8.1b zeigt, dass der erste Term zur linearen Stabtheorie gehört. Der zweite Term erfasst den Einfluss der Theorie II. Ordnung, d. h. des Gleichgewichts am verformten System. Wie man leicht sieht, können die Verschiebungen w(x), insbesondere w_b, infolge F_x **und** F_z in Bild 8.1c nicht ohne weite-

res berechnet werden. Verallgemeinert ergibt sich aus Bild 8.1 folgende Problemstellung: Wie können Verformungen und Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung bestimmt werden?

Nach einer Klärung der grundlegenden Zusammenhänge in Abschnitt 8.2 und der Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen werden anschließend folgende Methoden behandelt:

- Verwendung der virtuellen Arbeit
- Lösung der Differentialgleichung (DGL)
- Iterative Berechnungen
- Vergrößerungsfaktoren
- Ersatzbelastungsverfahren

Natürlich wird man in der Praxis häufig EDV-Programme einsetzen und nur bei einfachen Anwendungsfällen die o. g. Lösungsmöglichkeiten verwenden. Zur Klarstellung seien daher die vorrangigen Ziele genannt, die in diesem Kapitel verfolgt werden:

- Grundlegende Zusammenhänge klären
- Grundgleichungen bereitstellen
- Verständnis für das Tragverhalten wecken und schulen
- Kontrollmöglichkeiten für Berechnungen mit EDV-Programmen zur Verfügung stellen

Aus didaktischen Gründen wird hier nur die **einachsige Biegung mit Normalkraft** behandelt. Dies ist nicht nur der einfachste Fall bei der Theorie II. Ordnung, er hat auch für baupraktische Anwendungsfälle die größte Bedeutung und bildet darüber hinaus den Ausgangspunkt für beliebige Beanspruchungsfälle, s. Kapitel 9.

Anmerkungen: Die Zustandsgrößen für die Stütze in Bild 8.1c können mit der Lösung der DGL (s. Tabelle 8.3) oder unter Verwendung von Vergrößerungsfaktoren (s. Abschnitt 8.7) bestimmt werden. Die Verschiebung am Stützenkopf kann mit

$$w_b = \frac{F_z \cdot \ell^3}{EI \cdot \varepsilon^3} \cdot \left(\tan\varepsilon - \varepsilon\right) \quad \text{bzw.} \quad w_b \cong \frac{F_z \cdot \ell^3}{3 \cdot EI} \cdot \frac{1 - 0{,}014 \cdot N/N_{Ki}}{1 - N/N_{Ki}}$$

berechnet werden und das Biegemoment an der Einspannstelle mit:

$$M_a = -F_z \cdot \ell \cdot \frac{\tan\varepsilon}{\varepsilon} \quad \text{bzw.} \quad M_a = -F_z \cdot \ell \cdot \frac{1 - 0{,}18 \cdot N/N_{Ki}}{1 - N/N_{Ki}}$$

Als Parameter werden bei diesen Berechnungen die Stabkennzahl ε und die ideale Drucknormalkraft N_{Ki} verwendet.

8.2 Grundlegende Zusammenhänge

Zur Klärung der grundlegenden Zusammenhänge wird die Stütze in Bild 8.2 betrachtet. Da als Steifigkeit EI → ∞ angenommen wird, kann sie sich nicht verkrümmen und bleibt daher gerade. Dabei wird die Wegfeder C_w zusammengedrückt und die Verformungen der Stütze können mit **einer** Verformungsgröße beschrieben werden. Gewählt wird gemäß Bild 8.2c die Stabverdrehung φ.

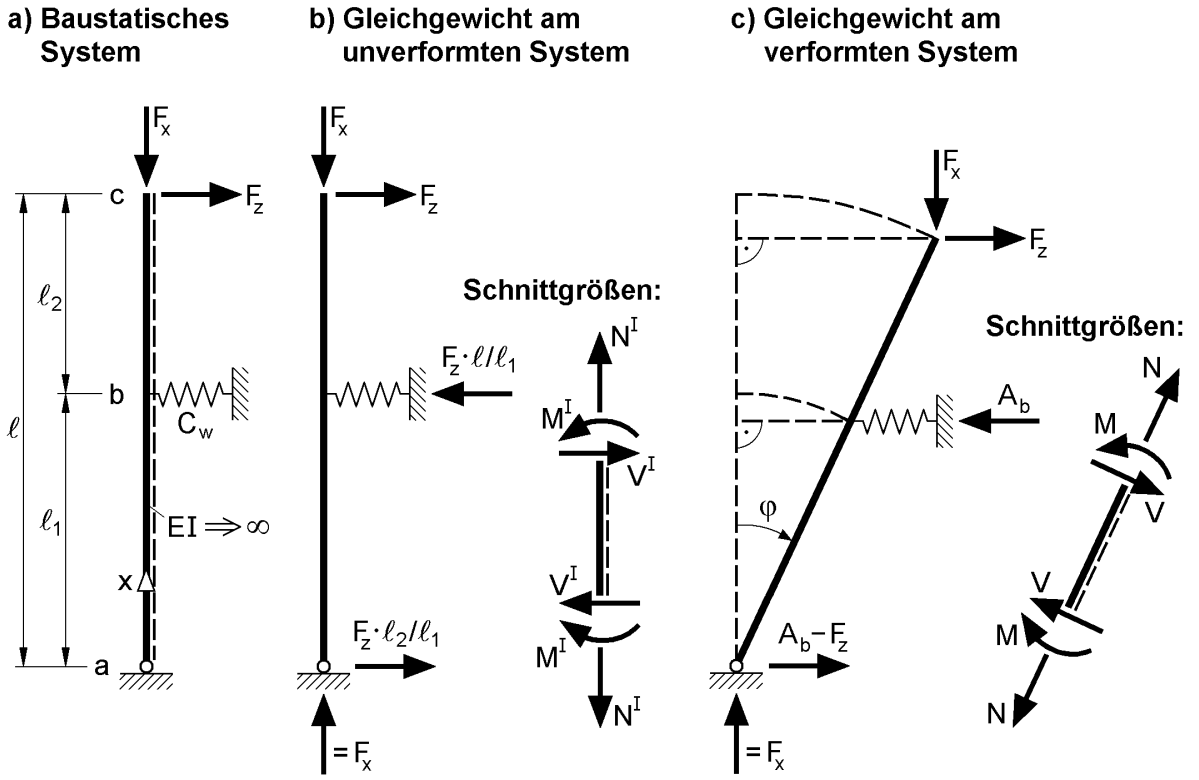


Bild 8.2 Gleichgewicht in der **un**verformten und der verformten Lage

Gleichgewicht am unverformten System

Bei der linearen Stabtheorie (Theorie I. Ordnung) wird das *Gleichgewicht am unverformten System* formuliert. Da das System statisch bestimmt ist, können die Auflagerkräfte und Schnittgrößen ohne Schwierigkeiten bestimmt werden. Mit den Skizzen in Bild 8.2b ergeben sich die in Tabelle 8.1 zusammengestellten Schnittgrößen nach Theorie I. Ordnung (Kopfzeiger „I“) für den **oberen** Stützenbereich.

Tabelle 8.1 Schnittgrößen im oberen Bereich der Stütze in Bild 8.2a

Schnittgrößen	Lineare Stabtheorie	Geometrisch nichtlineare Stabtheorie
Normalkraft	$N^I(x) = -F_x$	$N(x) = -F_x \cdot \cos\varphi + F_z \cdot \sin\varphi$
Querkraft	$V^I(x) = F_z$	$V(x) = F_z \cdot \cos\varphi + F_x \cdot \sin\varphi$
Biegemoment	$M^I(x) = -F_z \cdot (\ell - x)$	$M(x) = -F_z \cdot (\ell - x) \cdot \cos\varphi - F_x \cdot (\ell - x) \cdot \sin\varphi$

Mit dem linearen Federgesetz

$$A_b^I = C_w \cdot w_b^I \tag{8.1}$$

und der Auflagerkraft

$$A_b^I = F_z \cdot \ell/\ell_1 \tag{8.2}$$

erhält man

$$C_w \cdot w_b^I = F_z \cdot \ell/\ell_1 \tag{8.3}$$

und für kleine Winkel mit $w_b^I = \varphi^I \cdot \ell_1$

$$\varphi^I = \frac{F_z \cdot \ell}{C_w \cdot \ell_1^2}\,. \tag{8.4}$$

Gleichgewicht am verformten System

In Bild 8.2c ist das verformte System mit einem relativ großen Winkel φ gezeichnet. Damit soll sichtbar werden, dass sich die Stütze wie die Speiche eines Rades um den Fußpunkt dreht, der Kopfpunkt auf einem Kreisbogen liegt und sich daher im Vergleich zur unverformten Lage nach unten verschiebt. Darüber hinaus soll deutlich werden, dass die Lasten F_x und F_z ihre Richtung beibehalten und quasi am Kopfpunkt der Stütze „befestigt“ sind und sich daher entsprechend mit verschieben. Dies ist jedenfalls die Grundlage der Stabtheorie, die bis auf Ausnahmefälle auch der Realität entspricht.

Die Schnittgrößen N, M und V, die man für die Bemessung benötigt, beziehen sich, wie die Skizze in Bild 8.2c zeigt, auf die **verformte Stabachse**. Mit den trigonometrischen Funktionen sin φ und cos φ können sie, wie in Tabelle 8.1 rechts angegeben, für den oberen Teil der Stütze berechnet werden.

Die Auflagerkraft A_b ergibt sich aus dem Momentengleichgewicht am verformten System (Bild 8.2c) wie folgt:

$$A_b \cdot \ell_1 \cdot \cos\varphi = F_z \cdot \ell \cdot \cos\varphi + F_x \cdot \ell \cdot \sin\varphi \tag{8.5}$$

Andererseits gilt wiederum das lineare Federgesetz

$$A_b = C_w \cdot w_b\,, \tag{8.6}$$

sodass die Gln. (8.5) und (8.6) zu der folgenden Beziehung führen:

$$C_w \cdot w_b = F_z \cdot \ell/\ell_1 + F_x \cdot \ell/\ell_1 \cdot \tan\varphi \tag{8.7}$$

Die Verschiebung w_b wird nun durch

$$w_b = \ell_1 \cdot \sin\varphi \tag{8.8}$$

ersetzt, sodass sich die folgende Gleichung ergibt:

$$C_w \cdot \ell_1 \cdot \sin\varphi - F_x \cdot \ell/\ell_1 \cdot \tan\varphi = F_z \cdot \ell/\ell_1 \tag{8.9}$$

Gl. (8.9) ist eine nichtlineare Gleichung zur Bestimmung von φ, die zur **geometrisch nichtlinearen**, also exakten, **Stabtheorie** gehört. Sie kann nur iterativ gelöst werden, was für die üblichen Problemstellungen im Bauwesen zu umständlich und auch im Rahmen der erforderlichen Berechnungsgenauigkeit nicht erforderlich ist. Das **geometrisch nichtlineare Problem** wird daher im Sinne einer **Theorie II. Ordnung** teilweise linearisiert. Dabei geht man davon aus, dass die Verdrehungen klein sind und näherungsweise

$$\sin\varphi = \tan\varphi = \varphi \tag{8.10}$$

und

$$\cos\varphi = 1 \tag{8.11}$$

gesetzt werden können. Damit folgt aus Gl. (8.9)

$$\left(C_w \cdot \ell_1 - F_x \cdot \ell/\ell_1\right) \cdot \varphi = F_z \cdot \ell/\ell_1\,, \tag{8.12}$$

sodass sich der Winkel φ wie folgt ergibt:

$$\varphi = \frac{F_z \cdot \ell}{C_w \cdot \ell_1^2 - F_x \cdot \ell} \tag{8.13}$$

Im Vergleich zu Gl. (8.4) tritt hier im Nenner zusätzlich ein Term auf, der F_x enthält und die Nichtlinearität im Sinne der Theorie II. Ordnung erfasst. Wenn man den Nenner in Gl. (8.13) gleich Null setzt, wird die Verdrehung φ unendlich groß. Daraus ergibt sich auch, wie in Abschnitt 4.3 beschrieben, die **Knickbedingung für das Eigenwertproblem** und die **Verzweigungslast:**

$$F_{Ki,x} = C_w \cdot \ell_1^2/\ell \tag{8.14}$$

Bei Theorie II. Ordnung werden nicht nur die Winkelfunktionen, siehe Gln. (8.10) und (8.11), linearisiert, sondern auch mit einer weiteren Näherung die Last F_x durch die Drucknormalkraft ersetzt. Der Vorteil dieser Maßnahme wird an dem untersuchten Beispiel nicht deutlich, ist aber bei Stabwerken im Sinne einer möglichst einfachen Lösung notwendig. Bei dieser Näherung werden die **Drucknormalkräfte nach Theorie I. Ordnung** für die weiteren Berechnungen nach Theorie II. Ordnung verwendet. Hier ergibt sich mit Hilfe von Bild 8.2, wenn N als Drucknormalkraft positiv definiert wird,

$$F_x = N^I \tag{8.15}$$

und daher auch:

$$F_{Ki,x} = N_{Ki}^I \tag{8.16}$$

Der Kopfzeiger I wird jedoch in der Regel weggelassen, weil diese Vorgehensweise ein allgemein bekannter Bestandteil der Theorie II. Ordnung im Stahlbau ist.

In Bild 8.3 ist die Verdrehung der Stütze nach Theorie I. und II. Ordnung sowie auf Grundlage der geometrisch nichtlinearen Theorie dargestellt. Da die Verdrehung von F_x und F_z abhängt, wurde beispielhaft der Fall $F_z = 0{,}2 \cdot F_x$ gewählt. Wie man sieht,

sind die Unterschiede bis etwa 15° gering, weil sin φ = φ und cos φ = 1 mit 101,2 % und 103,5 % vergleichsweise gute Näherungen sind. Wenn man die Gln. (8.14) bis (8.16) in Gl. (8.13) einführt und darüber hinaus Gl. (8.4) berücksichtigt, so kann man die Verdrehung φ auch wie folgt berechnen:

$$\varphi = \varphi^{I} \cdot \alpha \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{1}{1 - N/N_{Ki}} \tag{8.17}$$

In Gl. (8.17) ist α ein ***Vergrößerungsfaktor*** mit dem die Verdrehung nach Theorie I. Ordnung φ^{I} vergrößert wird.

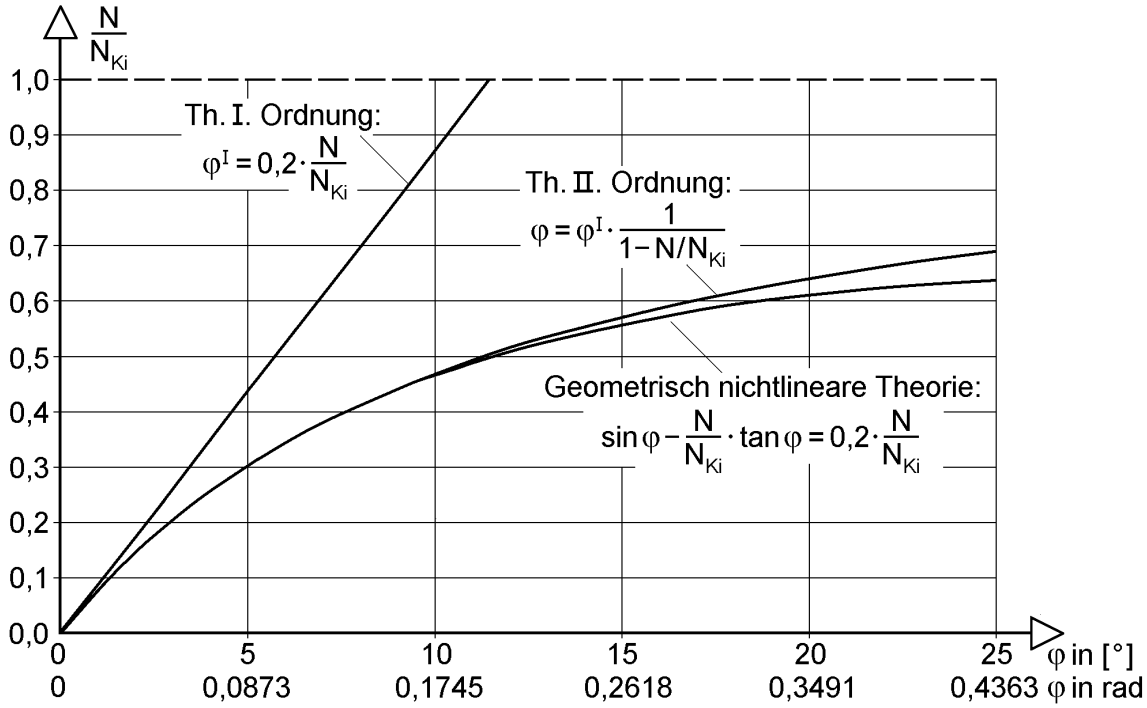


Bild 8.3 Verdrehung der Stütze in Bild 8.2 nach den verschiedenen Theorien

Anmerkung: Gemäß Bild 8.3 ergeben sich nach der geometrisch nichtlinearen Theorie **größere** Verdrehungen als nach Theorie II. Ordnung. Dies ist im Vergleich zu den Systemen in Abschnitt 2.7 (und vielen anderen) ungewöhnlich. Bei der Stütze in Bild 8.2 wird das Tragverhalten in maßgebender Weise durch die Feder beeinflusst, für die in Bild 8.2c angenommen wurde, dass sie mit der Stütze fest verbunden ist und dass die Reaktionskraft die horizontale Richtung beibehält. Da diese Voraussetzungen in der Baupraxis kaum realisiert werden können, ist die Stütze für die Beschreibung des geometrisch nichtlinearen Tragverhaltens mit großen Verdrehungen nur bedingt geeignet. Die Stütze wurde hier zur Klärung grundlegender Zusammenhänge als Beispiel gewählt.

Mit Hilfe von Tabelle 8.1 und den Näherungen für die Winkelfunktionen ergeben sich die Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung für den oberen Bereich der Stütze wie folgt:

$$N = -F_x + F_z \cdot \varphi; \quad V = F_z + F_x \cdot \varphi \tag{8.18a,b}$$

$$M = -F_z \cdot (\ell - x) - F_x \cdot (\ell - x) \cdot \varphi \tag{8.18c}$$

Der Vergleich mit der linearen Stabtheorie zeigt, dass sich **alle** Schnittgrößen durch den Einfluss der Verdrehung verändern. Darüber hinaus beziehen sich gemäß Bild 8.2c die Normalkraft N und Querkraft V auf die verformte Stabachse. Man benötigt diese Schnittgrößen, weil damit der Nachweis ausreichender Querschnittstragfähigkeit zu führen ist, s. auch Abschnitt 2.5. Man kann natürlich auch (wie in Bild 4.5) Schnittgrößen mit Bezug auf die vertikale und horizontale Richtung berechnen, die Beanspruchung der Querschnitte darf damit aber nicht ermittelt werden.

Wie bei der Verdrehung φ kann man auch die Schnittgrößen V und M unter Verwendung des Vergrößerungsfaktors α in Gl. (8.17) bestimmen. Nach einigen äquivalenten Umformungen erhält man:

$$V = V^{I} \cdot \alpha \tag{8.19a}$$

$$M = M^{I} \cdot \alpha \tag{8.19b}$$

Mit dem Vergrößerungsfaktor α in Gl. (8.17) können die Verformungen, Querkräfte und Biegemomente auch bei vielen anderen Systemen mit ausreichender Genauigkeit berechnet werden. Abschnitt 8.7 enthält dazu nähere Angaben.

Der Vollständigkeit halber soll hier auch der bekannte Zusammenhang

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx} = M'(x) \tag{8.20}$$

angegeben werden. Er ergibt sich unmittelbar, wenn Gl. (8.18c) einmal nach x differenziert wird. Gl. (8.20) soll klarstellen, dass die Ableitung des Biegemomentes gleich der Querkraft senkrecht zur **verformten** Stabachse ist (s. Bild 8.2c).

8.3 Prinzip der virtuellen Arbeit

Wenn Tragwerke belastet werden, treten aufgrund der einwirkenden Lastgrößen Verformungen auf. Als Reaktion entstehen im Tragwerk Spannungen und Verzerrungen, die zu Schnitt- und Verformungsgrößen führen. Sofern die Beanspruchungen aufgenommen werden können, befindet sich das Tragwerk im Gleichgewicht. Die Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen ist in der Baustatik eine zentrale Aufgabe und man benötigt entsprechende Prinzipien und Methoden. Üblich sind:

- *Prinzip der virtuellen Arbeit*
- Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie
- Gleichgewicht am differentiellen Element/Differentialgleichungen

Im Folgenden wird das Prinzip der virtuellen Arbeit verwendet und es werden in Abschnitt 8.4 die Differentialgleichungen hergeleitet.

Ein Tragwerk befindet sich im Gleichgewicht, wenn die Summe der virtuellen Arbeiten gleich Null ist. Die Bedingung

$$\delta W = \delta W_{ext} + \delta W_{int} = 0 \tag{8.21}$$

ist daher die allgemeine Forderung, dass Gleichgewicht vorhanden ist. In Gl. (8.21) ist δW_{ext} die *virtuelle Arbeit* der äußeren eingeprägten Kräfte (ext $\hat{=}$ external) und δW_{int} die *virtuelle Arbeit* aufgrund der entstehenden Spannungen (int $\hat{=}$ internal). Die innere *virtuelle Arbeit* ist als Reaktion auf die einwirkenden Kräfte negativ.

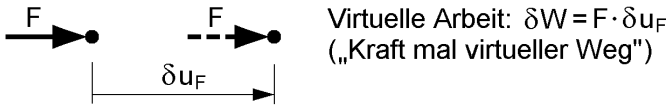


Bild 8.4 Virtuelle Arbeit einer Kraft

Der bekannte Zusammenhang „Arbeit = Kraft mal Weg“ wird in Bild 8.4 aufgegriffen und eine Kraft F betrachtet. Sie wird **in** Richtung ihrer Wirkungslinie verschoben und der Verschiebungsweg mit δu_F bezeichnet. Diese gedanklich vorgenommene Verschiebung δu_F („virtuelle Verrückung“) führt zur *virtuellen Arbeit* $\delta W = F \cdot \delta u_F$. Die äußere *virtuelle Arbeit* infolge von Einzellasten und Streckenlasten kann daher problemlos formuliert werden.

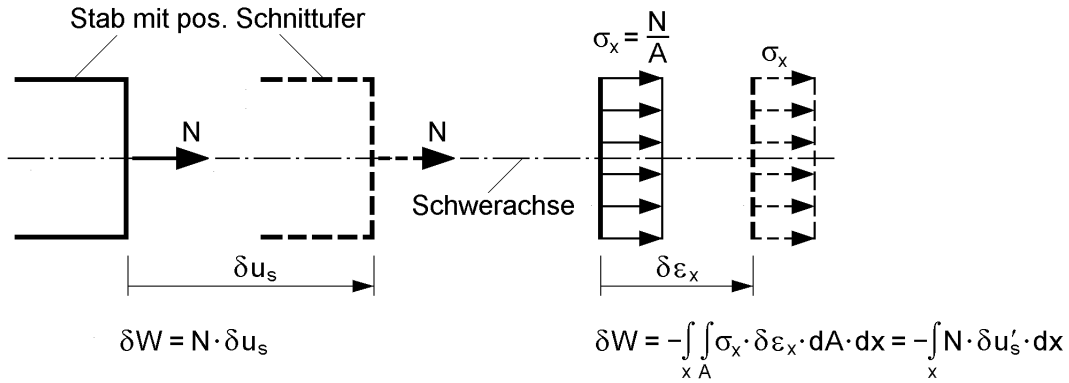


Bild 8.5 Virtuelle Arbeit infolge Normalkraft N und Spannung σ_x

In vergleichbarer Weise wie für die Kraft F in Bild 8.4 kann auch die virtuelle Arbeit ermittelt werden, die eine Normalkraft bei der virtuellen Verschiebung eines Querschnitts leistet. Da N vereinbarungsgemäß im Schwerpunkt S angreift, wird die virtuelle Verschiebung in Bild 8.5 mit δu_S bezeichnet. Rechts daneben wird die Normalspannung infolge N beispielhaft für die Ermittlung der inneren virtuellen Arbeit betrachtet. Sie ist als Reaktion auf die einwirkenden Kräfte negativ und das Produkt $\sigma_x \cdot \delta\varepsilon_x$ über den gesamten Stab zu integrieren. So wie Verschiebungswege zu Kräften korrespondieren, gehören bei der inneren virtuellen Arbeit Dehnungen zu Spannungen. Die Formulierung der virtuellen Arbeit für Stäbe wird in [25] und [31] ausführlich behandelt. Hier wird gezielt nur der Beanspruchungsfall „Biegung mit Normalkraft“ nach Theorie II. Ordnung untersucht. Bei diesem Fall werden in der inneren virtuellen Arbeit

$$\delta W_{int} = -\int_x \int_A \delta\varepsilon_x \cdot \sigma_x \cdot dA \cdot dx \tag{8.22}$$

nur Normalspannungen σ_x berücksichtigt und die Stäbe als schubstarr aufgefasst.

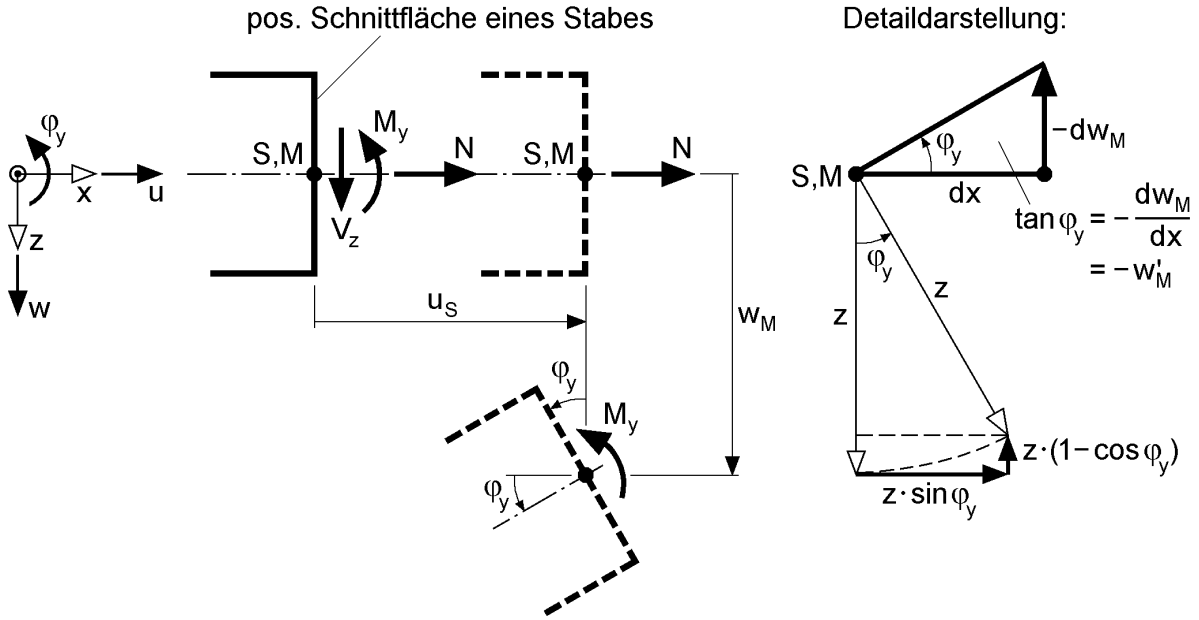


Bild 8.6 Verschiebungen u(z) und w(z) eines Querschnittspunktes infolge N und M_y

In Gl. (8.22) sollen die Normalspannung σ_x und die korrespondierende virtuelle Dehnung $\delta\varepsilon_x$ durch Verschiebungsgrößen ersetzt werden. Dazu werden in Bild 8.6 die positive Schnittfläche eines Stabes und die Verschiebungen betrachtet, die sich bei einachsiger Biegung mit Normalkraft ergeben. Grundlage ist, wie bei der Stabtheorie üblich, die Annahme vom Ebenbleiben der Querschnitte (*Bernoulli-Hypothese*). Der Querschnitt wird zunächst infolge N um u_S nach rechts und infolge Biegebeanspruchung um w_M nach unten verschoben. u_S ist die *Verschiebung* des Schwerpunktes und w_M ist die *Verschiebung* des Schubmittelpunktes. Die beiden Punkte ergeben sich aus der Normierung der Querschnittswerte, was in [25] ausführlich behandelt wird. In Bild 8.6 ist der Fall skizziert, dass S und M wie bei doppeltsymmetrischen Querschnitten in einem Punkt liegen.

Aufgrund der Annahme vom Ebenbleiben der Querschnitte führt das Biegemoment M_y zu einer Verdrehung φ_y der Querschnittsebene. Daraus folgen Verschiebungen in Richtung von u und w, die aus der Detaildarstellung in Bild 8.6 rechts abgelesen werden können, sodass sich insgesamt folgende Verschiebungen ergeben:

$$u(z) = u_S + z \cdot \sin\varphi_y \cong u_S - z \cdot w'_M \tag{8.23}$$

$$w(z) = w_M - z \cdot \left(1 - \cos\varphi_y\right) \cong w_M \tag{8.24}$$

Ebenfalls aus der Detaildarstellung in Bild 8.6 folgt:

$$\tan\varphi_y = -w'_M \tag{8.25}$$

Da auch bei der Theorie II. Ordnung gemäß Tabelle 2.1 von „*schwach verformten Systemen*“ ausgegangen wird, gilt näherungsweise $\cos\varphi_y \cong 1$, $\sin\varphi_y \cong \varphi_y$ und $\tan\varphi_y \cong \varphi_y$ sowie mit Gl. (8.25) $\varphi_y \cong -w'_M$.

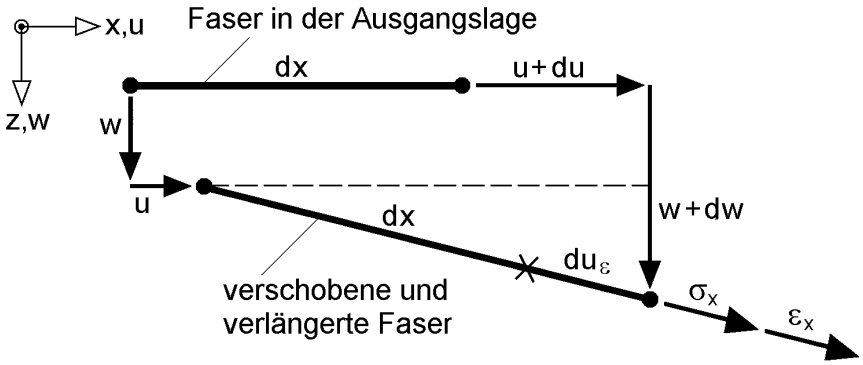


Bild 8.7 Verschiebung und Verlängerung einer Faser, [31]

Die Verschiebungen können nun dazu verwendet werden, die Dehnungen ε_x zu berechnen. Sie sind als Längenänderung bezogen auf die ursprüngliche Länge definiert, d. h. es gilt:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = u' \tag{8.26}$$

Diese Beziehung wird in dieser Formulierung bei der **linearen** Stabtheorie verwendet, weil sich die Verschiebung u auf eine Faser in der Ausgangslage bezieht. Bei Theorie II. Ordnung dagegen muss ε_x für die verformte Lage bestimmt werden. Dazu wird in Bild 8.7 eine verschobene und verlängerte Faser betrachtet. Dargestellt ist die Faser eines differentiellen Elementes der Länge dx, die Bestandteil eines Stabes sein soll. Wenn der Stab belastet wird, verschiebt und verlängert sich die Faser. Spannungen σ_x und Dehnungen ε_x beziehen sich auf die verformte Lage. Mit der Bezeichnung du_ε soll klargestellt werden, dass es sich um die differentielle Verschiebung **in** Richtung von ε_x handelt.

In dem Dreieck, das in Bild 8.7 durch die gestrichelte Linie entsteht, gilt mit dem *Satz des Pythagoras*

$$\left(dx + du_\varepsilon\right)^2 = \left(dx + du\right)^2 + dw^2 \tag{8.27}$$

und für die Dehnung $\varepsilon_x = du_\varepsilon / dx = u'_\varepsilon$:

$$\varepsilon_x = \sqrt{1 + 2u' + u'^2 + w'^2} - 1 \tag{8.28}$$

Mit den ersten beiden Gliedern der Reihenentwicklung

$$\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{1}{2}x \tag{8.29}$$

kann Gl. (8.28) vereinfacht werden und man erhält

$$\varepsilon_x = u' + \frac{1}{2} \cdot \left(u'^2 + w'^2\right) \tag{8.30}$$

im Sinne einer Näherung nach Theorie II. Ordnung. Vertiefende Untersuchungen in Abschnitt 9.2 zeigen jedoch, dass ε_x ohne den Term u'^2 genauer erfasst wird. In Gl. (8.30) werden nun die Ableitungen der Gln. (8.23) und (8.24)

$$u'(z) = u'_S - z \cdot w''_M \tag{8.31a}$$

$$w'(z) = w'_M \tag{8.31b}$$

eingesetzt und man erhält:

$$\varepsilon_x = u'_S - z \cdot w''_M + \frac{1}{2} \cdot w'^2_M \tag{8.32}$$

Damit ergibt sich die virtuelle Dehnung zu:

$$\delta\varepsilon_x = \delta u'_S - z \cdot \delta w''_M + \delta w'_M \cdot w'_M \tag{8.33}$$

Die Normalspannung σ_x kann ebenfalls durch die Verschiebungsgrößen ausgedrückt werden. Für linear elastisches Werkstoffverhalten gilt das *Hookesche Gesetz*

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \tag{8.34}$$

und mit Gl. (8.32) folgt

$$\sigma_x = E \cdot \left(u'_S - z \cdot w''_M + \frac{1}{2} \cdot w'^2_M \right) \tag{8.35}$$

Gemäß Tabelle 2.1 werden bei Theorie II. Ordnung die „wirklichen“ Verzerrungen mit den **linearen** kinematischen Beziehungen ermittelt, sodass der Term mit w'^2 in Gl. (8.35) entfällt. Unter Verwendung der Gln. (8.33), (8.35) und (8.22) kann nun die innere virtuelle Arbeit bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \delta W_{int} &= -\int_x \int_A \delta\varepsilon_x \cdot \sigma_x \cdot dA \cdot dx \\ &= -\int_x \left(\delta u'_S \cdot EA \cdot u'_S + \delta w''_M \cdot EI_y \cdot w''_M + \delta w'_M \cdot N \cdot w'_M \right) \cdot dx \end{aligned} \tag{8.36}$$

In G. (8.36) bedeuten:

$$A = \int_A dA \quad \text{(Querschnittsfläche)} \tag{8.37}$$

$$I_y = \int_A z^2 \cdot dA \quad \text{(Hauptträgheitsmoment um die y-Achse)} \tag{8.38}$$

$$N = \int_A \sigma_x \cdot dA = EA \cdot u'_S \quad \text{(Normalkraft, Zugkraft positiv)} \tag{8.39}$$

Da das Koordinatensystem das Hauptachsensystem des Querschnitts ist, bei dem der Ursprung im Schwerpunkt S liegt, gilt

$$\int_A z \cdot dA = 0 \tag{8.40}$$

Bei der Formulierung von Gl. (8.36) ist dies berücksichtigt worden. Da $EA \cdot u'_S = N$ eingesetzt worden ist, treten nur zweifache Produkte der Verformungsgrößen auf.

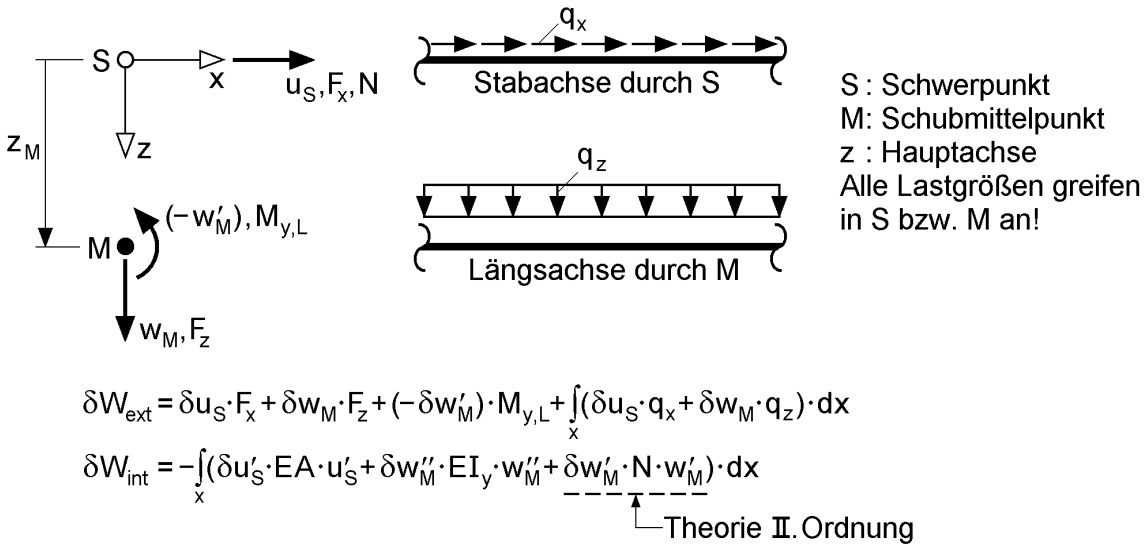


Bild 8.8 Virtuelle Arbeit bei einachsiger Biegung mit Normalkraft nach Theorie II. Ordnung

Als Ergebnis des vorliegenden Abschnitts enthält Bild 8.8 die virtuelle Arbeit für einachsige Biegung mit Normalkraft. Der Einfluss der Theorie II. Ordnung wird mit dem Term erfasst, der die Normalkraft N enthält. Sie ist hier als Zugkraft positiv definiert und muss vorab in einer Berechnung nach Theorie I. Ordnung bestimmt werden. Danach kann die Berechnung nach Theorie II. Ordnung durchgeführt werden. Die virtuelle Arbeit in Bild 8.8 bildet den Ausgangspunkt für Berechnungen nach Theorie II. Ordnung (s. auch Abschnitt 8.5) und für Stabilitätsuntersuchungen wie beispielsweise in Abschnitt 4.14 (s. auch Bild 4.49).

8.4 Differentialgleichungen und Randbedingungen

Die virtuelle Arbeit in Bild 8.8 kann mit Hilfe der partiellen Integration

$$\int_0^\ell u' \cdot v \cdot dx = \left[u \cdot v\right]_0^\ell - \int_0^\ell u \cdot v' \cdot dx \tag{8.41}$$

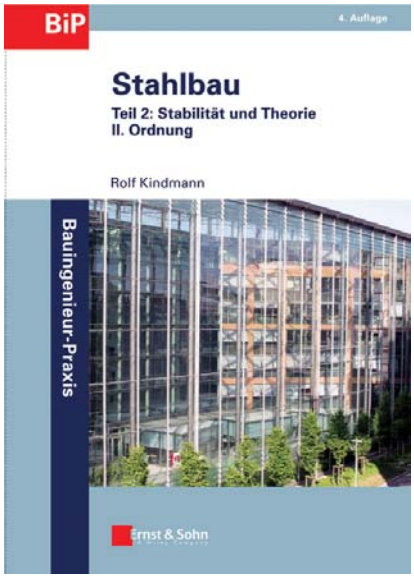
so umgeformt werden, dass die **Ableitungen** der virtuellen Verschiebungsgrößen entfallen. Dabei wird angenommen, dass an **beiden Stabenden** Lastgrößen F_x, F_z und $M_{y,L}$ vorhanden sind. Wenn man $\delta u'_S$ beseitigt und alle Terme, die δu_S enthalten, berücksichtigt, ergibt sich das Gleichgewicht in Richtung von x bzw. u wie folgt:

$$\left[\delta u_S \cdot \left(F_x - EA \cdot u'_S\right)\right]_0^\ell + \int_0^\ell \delta u_S \cdot \left[\left(EA \cdot u'_S\right)' + q_x\right] \cdot dx = 0 \tag{8.42}$$

Die erste eckige Klammer enthält die ***Randbedingungen*** und die zweite unter dem Integral die ***Differentialgleichung***:

$$\left(EA \cdot u'_S\right)' + q_x = 0 \tag{8.43}$$

BUCHEMPFEHLUNG



Kindmann, R.

Stahlbau

Teil 2: Stabilität und Theorie II. Ordnung
4., vollständig überarbeitete Auflage

Das Werk befaßt sich schwerpunktmäßig mit Knicken, Biegeknicken und Biegedrillknicken von Stäben und Stabwerken mit den Grundlagen und in ausführlichen Beispielen. Behandelt werden Theorie II. Ordnung wie auch Ersatzstabverfahren. Hinzu kommen Kapitel über Plattenbeulen und vorgespannte Seile. Der Leser wird an den selbständigen Nachweis druck- und zugbeanspruchter Systeme und Tragwerke herangeführt.

(429 Seiten, 307 Abb., 79 Tab. Broschur)

Aus dem Inhalt:

- EINLEITUNG UND ÜBERSICHT
- TRAGVERHALTEN, BERECHNUNGS- UND NACHWEISVERFAHREN
- NACHWEISE FÜR DAS BIEGEKNICKEN MIT ABMINDERUNGSFAKTOREN
- STABILITÄTSPROBLEM BIEGEKNICKEN
- NACHWEISE FÜR DAS BIEGEDRILLKNICKEN MIT ABMINDERUNGSFAKTOREN
- STABILITÄTSPROBLEM BIEGEDRILLKNICKEN
- NACHWEISE UNTER ANSATZ VON ERSATZIMPERFEKTIONEN
- THEORIE II. ORDNUNG FÜR BIEGUNG MIT NORMALKRAFT
- THEORIE II. ORDNUNG FÜR BELIEBIGE BEANSPRUCHUNGEN
- AUSSTEIFUNG UND STABILISIERUNG
- STABILITÄTSPROBLEM PLATTENBEULEN UND BEULNACHWEISE

Link Online-Bestellung **per Fax bestellen +49(0)30 47031 240**

Anzahl	Bestell-Nr.	Titel	Einzelpreis
	978-3-433-01836-1	Stahlbau	ca. € 55,-/sFr 88,-
	904574	Gesamtverzeichnis Verlag Ernst & Sohn	kostenlos
	2092	Zeitschrift Stahlbau (1 Probeheft)	kostenlos

Liefer- und Rechnungsanschrift: ☐privat ☐geschäftlich

Firma			
Ansprechpartner			Telefon
UST-ID Nr./VAT-ID No.			Fax
Straße//Nr.			E-Mail
Land	-	PLZ	Ort

Wilhelm Ernst & Sohn
Verlag für Architektur und
technische Wissenschaften
GmbH & Co. KG
Rotherstr. 21, 10245 Berlin
Deutschland
www.ernst-und-sohn.de

Ernst & Sohn
A Wiley Company

✕

Datum/Unterschrift

*€-Preise gelten ausschließlich in Deutschland. Alle Preise enthalten die gesetzliche Mehrwertsteuer. Die Lieferung erfolgt zuzüglich Versandkosten. Es gelten die Lieferungs- und Zahlungsbedingungen des Verlages. Irrtum und Änderungen vorbehalten. Stand: März 2008 (homepage_Leseprobe)