

Hans-Wolf Reinhardt

Ingenieurbaustoffe

■ Grundlagen des Werkstoffverhaltens für die richtige, optimale Baustoffwahl

Das Buch ist keine Enzyklopädie der Baustoffe, es ist vielmehr eine systematische Abhandlung mit Betonung auf den Grundlagen des Stoffverhaltens, um somit das Verständnis für die Abhängigkeiten der Werkstoffkonstanten, die eigentlich keine Konstanten sind, zu fördern.



2. aktualis. u. erw. Auflage · 2010 ·
382 Seiten · 313 Abbildungen · 69 Tabellen

Hardcover
ISBN 978-3-433-02920-6 € 39,90*

ÜBER DAS BUCH

Baustoffe erfüllen ihren Zweck, wenn sie richtig ausgewählt, hergestellt und verarbeitet sind. Sie bestimmen die Tragfähigkeit einer Konstruktion, die Gestalt, den Wärme- und Schallschutz, die Wasserdichtheit und den Widerstand gegen Temperatur- und Feuchtewechsel, und auch den Preis.

Dieses Buch behandelt die wichtigsten Werkstoffe des Konstruktiven Ingenieurbaus. Es führt zunächst grundlegend in das mechanische Werkstoffverhalten, die rheologischen Modelle, die Bruchmechanik und die Transportmechanismen poröser Stoffe ein. Systematisch werden dann die Baustoffe jeweils mit ihrer Zusammensetzung und ihrem mechanischem Verhalten als Funktion von Belastungsart und -geschwindigkeit,

Temperatur und Feuchte beschrieben. Großer Wert wird dabei auf eine vergleichende Betrachtung gelegt. Somit schlägt das Buch die Brücke zwischen Grundlagenwissen und Baupraxis, über welche konstruktive Ingenieure gehen können, denn sie sind verantwortlich für die richtige und optimale Auswahl und Verarbeitung der Werkstoffe, manchmal auch für deren Herstellung (z. B. Beton). Eine gründliche Kenntnis des mechanischen, physikalischen und chemischen Verhaltens ist hierfür Voraussetzung.

BESTELLUNG

Anzahl	ISBN /	Titel	Preis
	978-3-433-02920-6	Ingenieurbaustoffe	€ 39,90*

Privat Geschäftlich

Bitte richten Sie Ihre Bestellung an:
Tel. +49 (0)30 47031-236
Fax +49 (0)30 47031-240
marketing@ernst-und-sohn.de

Firma, Abteilung UST-ID Nr.

Name, Vorname Telefon Fax

Straße, Nr.

PLZ/Ort/Land E-Mail



www.ernst-und-sohn.de/2920

Datum/Unterschrift

BESTELLEN

+49 (0)30 470 31-236

marketing@ernst-und-sohn.de

www.ernst-und-sohn.de/2920

die Miner-Regel in der Praxis wegen ihrer Einfachheit angewendet; die Ungenauigkeit wird dadurch berücksichtigt, dass der Grenzwert der Schädigungssumme < 1 gewählt wird. Zum Beispiel wird von Det Norske Veritas für Bohrplattformen $D = 0,2$ angenommen, von VNC (Vereniging Nederlandse Cementindustrie) für Betonstraßen in den Niederlanden $0,5$; von FIP (Fédération Internationale de la Précontrainte) wird zwar $D = 1$ eingesetzt, jedoch auf den Mittelwert, reduziert um die zweifache Standardabweichung, bezogen [33].

2.5.4 Bruchmechanik und Schwingbeanspruchung

Betrachtet man eine Bruchfläche, die durch Schwingbeanspruchung entstanden ist, sieht man Linien, die durch einen allmählichen Rissfortschritt entstanden sind. Misst man während eines Schwingversuches die Verformung unter Last, so nimmt man eine Verformungszunahme mit jedem Schwingspiel wahr. Offensichtlich gibt es in beiden Fällen kleine Anrisse oder Fehler, die bei der Schwingbeanspruchung weiterwachsen. Im Beton sind schon vor der ersten Belastung Matrix- und Verbundrisse vorhanden und bei Metallen können Gitterfehler auf mikroskopischem Niveau oder Spannungsspitzen an Kerben auf makroskopischem Niveau zu kleinen Anrissen führen. Sind solche Anrisse vorhanden, liegt es nahe, die *Bruchmechanik* einzusetzen.

Geht man davon aus, dass zyklische Verformungen an der Rissspitze den Rissfortschritt bewirken und diese mit dem Spannungsintensitätsfaktor beschrieben werden können, dann folgt mit

$$\Delta K = \Delta S(\pi a)^{\frac{1}{2}} Y(a) \quad (104)$$

die maßgebende Größe. ΔS ist die Schwingbreite, bezogen auf den Nennquerschnitt bei Berücksichtigung der Risslänge a , und $Y(a)$ die Geometriefunktion (siehe Tabelle A.2 in Abschnitt A 2.4.1.4). Wenn a durch Schwingbeanspruchung zunimmt, wird ΔK größer und erreicht schließlich den kritischen Spannungsintensitätsfaktor K_c . Die Aufgabe besteht darin, den Zusammenhang zwischen Spannungsintensitätsfaktor und Rissfortschritt zu beschreiben. Im Wesentlichen geschieht dies durch Versuche, deren Auswertung zu allgemeingültigen Aussagen führt.

Bild A.45 zeigt den Zusammenhang zwischen Risslänge a und Schwingspielzahl n im linearen Maßstab. Unterschieden wird in die Bereiche Risseinleitung und -ausbreitung. Erst

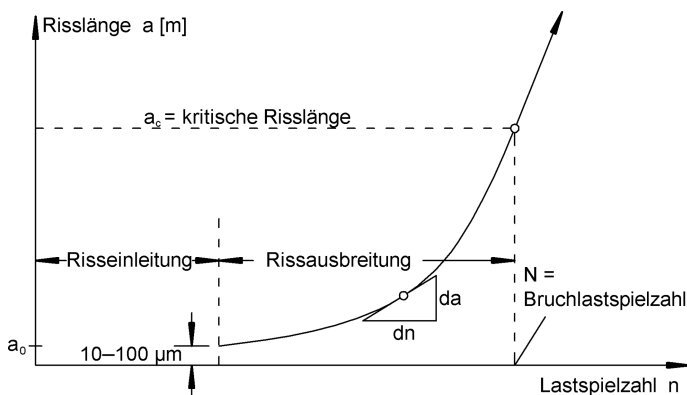


Bild A.45 Rissfortschritt als Funktion der Lastspielzahl

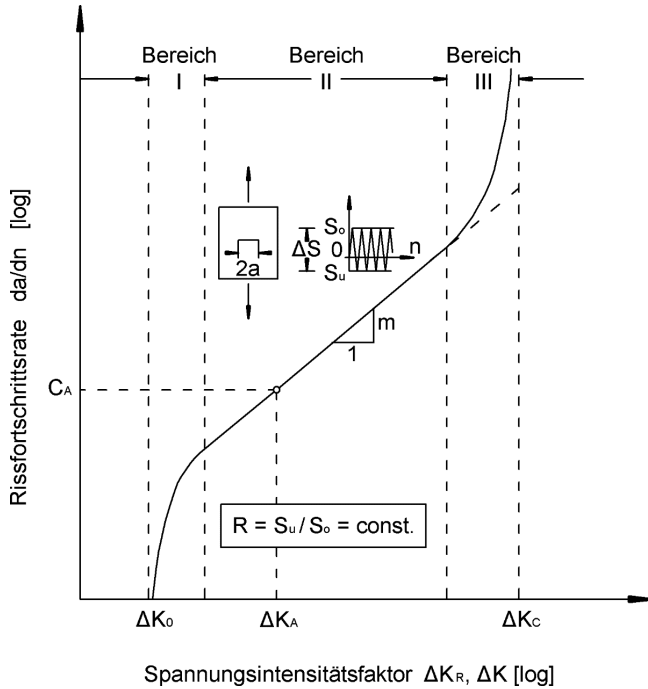


Bild A.46 Rissfortschritt in Abhängigkeit von der Schwingbreite des Spannungsintensitätsfaktors [34]

ab einem sichtbaren Riss mit der Länge a_0 beginnt eine stabile Rissausbreitung, die trotz gleicher äußerer Belastung an Geschwindigkeit zunimmt und schließlich zu der zu K_c gehörenden kritischen Risslänge a_c führt. Trägt man die Steigung da/dn als Funktion von ΔK nach Gl. (104) auf, ergibt sich Bild A.46.

Der Bereich I zeigt einen langsamen Rissfortschritt mit dem unteren Grenzwert ΔK_0 (entsprechend der Dauerfestigkeit). Der Bereich II ist durch einen stabilen Rissfortschritt gekennzeichnet, der durch die sog. Paris-Gleichung [35] beschrieben wird:

$$da/dn = C \cdot \Delta K^m \tag{105}$$

C und m sind vom Werkstoff und vom Spannungsverhältnis R abhängig. Der Exponent m liegt für Metalle zwischen 2 und 4.

Im Bereich III beschleunigt sich der Rissfortschritt, bis der Restbruch eintritt, wenn

$$\Delta K = (1 - R)K_c, \tag{106}$$

d. h. die Risszähigkeit unter der Zugoberspannung erreicht wird.

Durch Integration der Gl. (105) nach Einsetzen von Gl. (104) folgt

$$\int_{a_0}^a \bar{a}^{m/2} d\bar{a} = C \Delta S^m Y^m \pi^{m/2} \cdot n \tag{107}$$

und damit

$$n = \frac{1 - (a_0/a)^{m/2-1}}{a_0^{m/2-1} (m/2 - 1) C \Delta S^m Y^m \pi^{m/2}} \tag{108}$$

und

$$N = \frac{1 - (a_0/a_c)^{m/2-1}}{a_0^{m/2-1} (m/2 - 1) C \Delta S^m Y^m \pi^{m/2}}. \quad (109)$$

Die bezogene Risswachstumsfunktion wird damit

$$\frac{n}{N} = \frac{1 - (a_0/a)^{m/2-1}}{1 - (a_0/a_c)^{m/2-1}}. \quad (110)$$

Bild A.47 zeigt den Rissfortschritt als Funktion der bezogenen Lebensdauer unter Annahme einer im Vergleich zur kritischen Risslänge a_c kleinen Anfangsrisslänge a_0 . Für diesen Fall ist $N/2$ bei $m = 4$ erreicht, wenn a_0 auf $2 a_0$ angewachsen ist, und bei $m = 3$, wenn a_0 auf $4 a_0$ gewachsen ist.

Analog zur Miner-Regel kann eine Schadensakkumulation berechnet werden, indem Rissfortschritte unter bestimmten ΔS aufsummiert und mit Gl. (105) ausgewertet werden. Durch Umformen von Gl. (110) ergibt sich

$$\frac{n_i}{N_i} = \frac{\alpha_{i-1} - \alpha_i}{\alpha_0 - \alpha_e} \quad \text{mit} \quad \alpha_i = a_i^{1-m/2}. \quad (111)$$

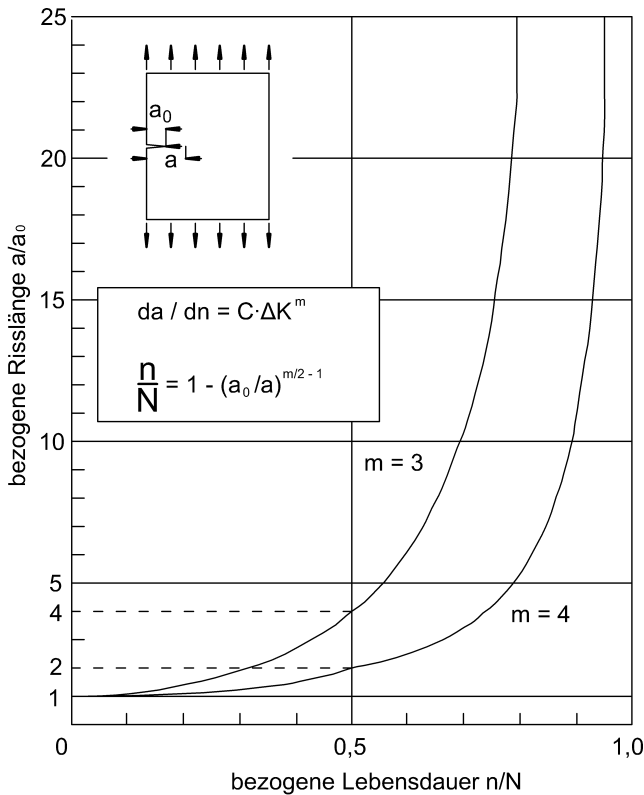


Bild A.47 Risswachstum als Funktion der Lebensdauer [34]

Die Miner-Regel wird damit

$$\sum_{i=1}^e \frac{n_i}{N_i} = \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{\alpha_0 - \alpha_e} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_0 - \alpha_e} + \dots + \frac{\alpha_{e-1} - \alpha_e}{\alpha_0 - \alpha_e} = 1. \tag{112}$$

Schematisch zeigt Bild A.48 die Entwicklung der Risslänge bei unterschiedlichen Spannungshorizonten. Die einzelnen Anteile n_i / N_i werden aus den entsprechenden Schädigungskurven, die zu ΔS_i gehören, abgegriffen und zusammengesetzt. Wenn die Endrisslänge a_e erreicht ist, ist die Schädigungssumme eins.

Die Paris-Gleichung wurde verschiedentlich verbessert, indem das linear elastische Werkstoffmodell durch ein realistischeres elastisch-plastisches Modell ersetzt wurde. Dadurch wurde es möglich, die Plastizierung an der Rissspitze und die bei Entlastung entstehenden Eigenspannungen zu berücksichtigen. Dies erlaubt dann auch, Reihenfolgeeffekte richtig zu deuten und vorherzusagen [36].

Bild A.49 veranschaulicht, wie plastische Verformungen an der Rissspitze entstehen, wenn die Fließgrenze erreicht wird. Bei der Entlastung (2) wird der überdehnte Bereich

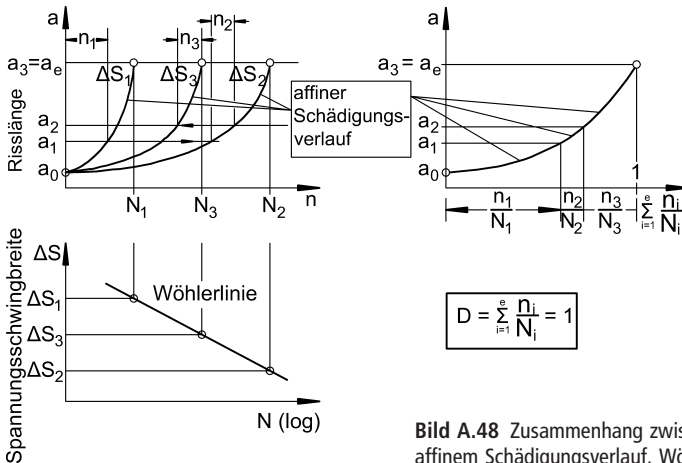


Bild A.48 Zusammenhang zwischen Rissfortschrittkurven, affinem Schädigungsverlauf, Wöhlerlinie und Miner-Regel [34]

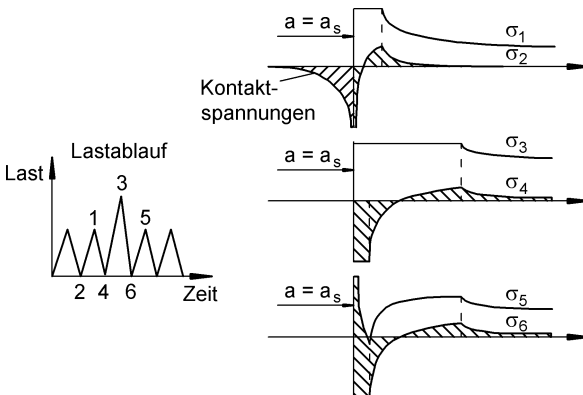


Bild A.49 Plastische Verformungen und Eigenspannungen an der Rissspitze [37]

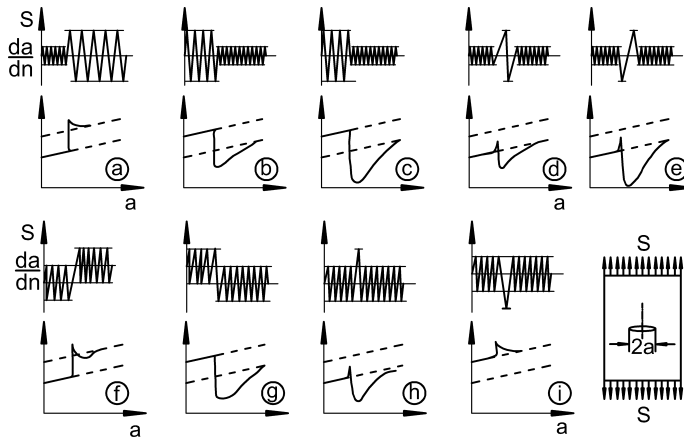


Bild A.50 Verzögerter bzw. beschleunigter Rissfortschritt als Folge veränderter Beanspruchung [37]

durch die elastische Rückfederung des umgebenden Materials auf Druck vorgespannt und es entwickeln sich Kontakt- und Eigenspannungen. Bei höherer Spannung (3) breitet sich der plastisch gedehnte Bereich aus. Dies hat zur Folge, dass unter der Belastung (5) fast nur elastische Dehnungsbereiche auftreten. Die Kerbspitze ist abgestumpft und der Rissfortschritt wird gehemmt.

Bild A.50 zeigt einige Fälle, bei denen der Rissfortschritt verlangsamt bzw. beschleunigt wird, je nachdem wie stark die Rissspitzenzone plastisch verformt wurde.

Das Bruchmechanikkonzept wurde ursprünglich entwickelt, um Lebensdauervorhersagen für angerissene Bauteile zu machen. Gekoppelt an zerstörungsfreie Prüfungen und festgelegte Prüfintervalle ist es möglich, auch stark geschädigte Bauteile mit ausreichender Sicherheit weiter zu betreiben. Andererseits kann man Fehlstellen geringer Größe, die nicht entdeckt werden können, hinsichtlich ihrer lebensdauerbeeinflussenden Wirkung beurteilen. Im Flugzeug- und Maschinenbau ist dieses Konzept weit verbreitet, während es im Bauwesen bei der Abschätzung der Lebensdauer von alten Eisenbahnbrücken jetzt erst Eingang findet [38].

3 Transportmechanismen¹⁾

Der Transport von Gasen und Flüssigkeiten in porösen Baustoffen ist eine Erscheinung, die planmäßig gewollt oder ungewollt in Kauf genommen wird. Transport bedeutet z. B. Verlust von Flüssigkeit aus einem Behälter, Undichtigkeit eines Untertunnels, Eindringen von Benzin in eine Abfüllfläche einer Tankstelle, Carbonatisierung von Beton oder Austrocknung von Holz [39, 40]. In nicht-porösen Stoffen finden ebenfalls Transportvorgänge statt. In Metallen wechseln Atome ihren Platz und bei Kunststoffen dringen Weichmacher heraus und Lösungsmittel hinein. Für den Transport von Flüssigkeiten und Gasen sind treibende

¹⁾ Obwohl das vorliegende Buch hauptsächlich die mechanischen Eigenschaften der Baustoffe behandelt, ist es angebracht, auch auf die Transportmechanismen einzugehen, da deren Auswirkungen mechanische Wirkungen hervorrufen können. Das beste Beispiel ist das Schwinden von Holz oder Beton mit den dadurch verursachten Eigen- und Zwangsspannungen.

Kräfte notwendig. Diese sind physikalischer oder chemischer Art und können immer durch ein Potential oder, einfacher ausgedrückt, durch einen Unterschied in Druck, Konzentration oder elektrischer Spannung dargestellt werden. Entsprechend der treibenden Kraft werden die Transportmechanismen unterschieden und eingeteilt. Die im Bauwesen wesentlichen Mechanismen werden im Folgenden behandelt. In den baustoffspezifischen Kapiteln wird auf diesen allgemeinen Teil Bezug genommen und es werden Baustoffkennwerte diskutiert, die für die quantitative Berechnung nötig sind.

3.1 Poröse Baustoffe

Verantwortlich für den Transport von Gasen und Flüssigkeiten sind hier die durchgehenden Poren, die kanalförmig miteinander verbunden sind. Bild A.51 zeigt schematisch mögliche Poren: kanalförmig durchgehende Poren, von der Oberfläche zugängliche Sackporen und unzugänglich eingeschlossene Poren. Die Sackporen können Stoffe aufnehmen, z. B. Wasser oder Ionen, die jedoch nicht weiter in den Baustoff eindringen. Die geschlossenen Poren sind hier nicht wichtig, da sie von außen nicht zugänglich sind. Die im Zusammenhang mit dem Transport wichtigsten Poren sind die kanalförmig durchgehenden Poren. Eine Zwischenstellung nehmen kugelförmige Poren ein, die über dünne kanalförmige Poren zugänglich sind; dies sind z. B. künstlich eingeführte Luftporen in frostbeständigem Beton. Die Größe von Poren in Baustoffen ist sehr unterschiedlich, sie reicht vom Nanometer- zum Millimeterbereich. Nach der International Union of Pure and Applied Chemistry (IUPAC) wird unterschieden in Mikroporen (Durchmesser $< 2,5$ nm), Mesoporen (2,5 bis 50 nm) und Makroporen (> 50 nm). Die Form der Poren ist meist unregelmäßig. Häufig werden die kanalförmigen Poren als Zylinder mit kreisförmigem Querschnitt dargestellt, um sie mathematisch einfacher erfassen zu können.

Der Einfachheit halber werden im Folgenden nur *isotherme* Zustände behandelt, obwohl bei praktischen Fragestellungen die Temperatur über ein Bauteil häufig variiert. Ein typischer Fall ist der Dampftransport in einer Außenwand, wobei es zu Kondenswasserbildung kommen kann, also zu einem Phasenübergang Dampf/Flüssigkeit mit Wärmeentwicklung.

Solche Fragestellungen gehören klassischerweise in das Gebiet der Bauphysik. Andererseits ist der Einfluss unterschiedlicher Temperaturen in vielen Fällen gering und es genügt, die Eigenschaften bei der mittleren Temperatur zu betrachten. Einen wesentlichen Einfluss auf den Transport haben der Sättigungsgrad und die Zeitabhängigkeit. Man unterscheidet in

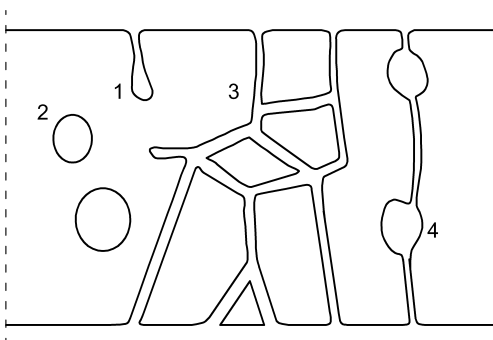


Bild A.51 Porenarten, schematisch; 1) sackartig geöffnet, 2) geschlossen, 3) kanalförmig geöffnet, 4) kanalförmig mit kugelförmigen Erweiterungen

gesättigten bzw. ungesättigten und stationären bzw. instationären Zustand. Im Folgenden werden solche Transportarten betrachtet, die zum Verständnis des Verhaltens von Baustoffen im Zusammenhang mit deren Herstellung, Nutzung und Dauerhaftigkeit notwendig sind. Viel weiter gehende Abhandlungen finden sich in den Gebieten Geohydrologie, Bauphysik, Physikalische Chemie und Prozesstechnik.

3.2 Hydraulische Strömung

Der einfachste Fall betrifft die stationäre, eindimensionale Strömung einer viskosen Flüssigkeit (Newton'sche Flüssigkeit) durch einen gesättigten isotropen Baustoff unter einer Druckdifferenz von Δp (Bild A.52).

Wird die Druckdifferenz in m Wassersäule ausgedrückt, ergibt sich die Durchflussrate q [m^3/s]

$$q = kA \frac{\Delta p}{d} \quad (113)$$

mit k = Durchlässigkeit [m/s] und A = Durchflussquerschnitt. Die Geschwindigkeit der Flüssigkeit durch die Wand ist $v = q/A$ (Filtergeschwindigkeit). Die örtliche Geschwindigkeit, mit der die Poren durchströmt werden, ist $v_s = v/\varepsilon$ (Sickergeschwindigkeit) mit $\varepsilon = V_p/V_t$, effektive Porosität ist gleich dem Verhältnis von zugänglichem Porenvolumen zu Gesamtvolumen des Stoffes. Gl. (113) wird als Darcy'sches Gesetz bezeichnet und kann verallgemeinert werden zu

$$\frac{dm}{dt} = -A \frac{K\rho}{\eta} \frac{dp}{dx} \quad (114)$$

mit dm/dt = Massenstrom [kg/s], K = spezifische Durchlässigkeit [m^2], ρ = Dichte der Flüssigkeit [kg/m^3], η = dynamische Viskosität [$\text{Pa s} = \text{N s/m}^2$] und p = Druck [$\text{Pa} = \text{N/m}^2$]. Das Minuszeichen gibt an, dass die Flüssigkeit in Richtung des niedrigeren Druckes fließt. Eine Beziehung zwischen Durchflussrate und Geometrie ergibt sich über das Hagen-Poiseuille'sche Gesetz für eine zylindrische Röhre mit Radius r und Länge l :

$$v_s = \frac{r^2}{8\eta} \frac{\Delta p}{l}. \quad (115)$$

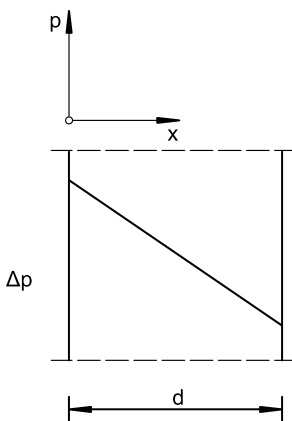


Bild A.52 Stationäre eindimensionale Strömung

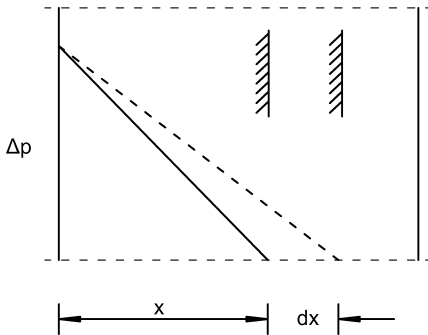


Bild A.53 Eindringen einer Flüssigkeitsfront

Stellt man sich die Porosität eines Stoffes als Bündel von n gleichen Kapillaren je m^2 vor, dann ist $\varepsilon = n\pi r^2$ und $K = n\pi r^4/8$. Die spezifische Durchlässigkeit (oder Permeabilität) ist also sehr stark von der Porengröße abhängig. Die Gln. (113) bis (115) gelten für laminare Strömung, die bis zu einer Reynolds-Zahl von ca. 0,1 gilt ($Re = 2v_s r \rho / \eta$), was bei der Durchströmung von Baustoffen in der Regel zutrifft.

Für die Strömung durch einen Spalt der Breite w und der Länge l (z. B. durch einen Riss) gilt

$$q = -\alpha \frac{w^3 l}{\eta} \frac{dp}{dx}, \quad (116)$$

wobei für einen glatten Spalt $\alpha = 1/12$ und für einem rauhen, zerklüfteten Spalt (z. B. in Beton) $\alpha \approx 1/100$.

3.3 Eindringen einer Flüssigkeit unter Druck

Das Eindringen einer Flüssigkeitsfront in einen porösen Stoff ist ein instationärer Prozess, der mit vereinfachenden Annahmen direkt aus Gl. (114) folgt. Ein Druckgefälle $\Delta p/x$ (Bild A.53) erzeugt eine Sickergeschwindigkeit $v_s = dx/dt$. Nach Umformung ergibt sich die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = \frac{K}{\varepsilon \eta} \frac{\Delta p}{x} \quad (117)$$

mit der Lösung (Anfangsbedingung $t = 0, x = 0$)

$$x = \left(\frac{2K}{\varepsilon \eta} \Delta p t \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (118)$$

Die Einflüsse des Baustoffs (K/E), der Flüssigkeit (η), des Druckes (Δp) und der Zeit (t) bestimmen das Ergebnis. Für die Anwendung in der Praxis ist die Abhängigkeit von \sqrt{t} (und nicht von t) wichtig.

3.4 Kapillare Flüssigkeitsbewegung

Ein Handtuch saugt Wasser auf, ein eingetunktes Brot Kaffee, ein poröser Baustoff Regenwasser oder andere Flüssigkeiten. Die treibende Kraft für die Flüssigkeitsaufnahme ist die Kapillarkraft, die auf der Grenzflächenspannung (Oberflächenspannung) und dem Rand-

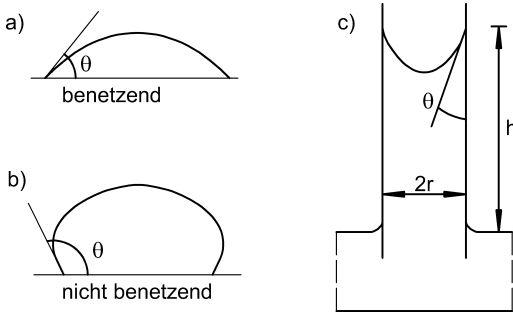


Bild A.54 Einfluss des Randwinkels

winkel zwischen Flüssigkeit und Feststoff beruht. Ist in Bild A.54 der Randwinkel $\theta < 90^\circ$, benetzt die Flüssigkeit die Oberfläche, bei $\theta \geq 90^\circ$ ist dies nicht der Fall. Bei $\theta = 0^\circ$ bildet sich ein Film, z. B. bei Wasser auf mineralischen Baustoffen. Oberflächenspannungen treten immer an Grenzflächen zwischen Flüssigkeiten und Gasen oder zwei nicht mischbaren Flüssigkeiten auf. Im Inneren der Flüssigkeit herrscht Gleichgewicht zwischen den Molekülen, da die anziehenden und abstoßenden Kräfte überall gleich groß sind. An einer Grenzfläche zwischen den Phasen *a* und *b* ist diese Ordnung gestört. Es treten resultierende Kraftkomponenten auf, die in Richtung des Flüssigkeitsinnern wirken. Die Energie, um die Grenzfläche zu vergrößern, heißt Grenzflächenspannung und hat die Dimension $[J/m^2]$ oder $[N/m]$. Ebene Grenzflächen sind nur möglich, wenn der Druck in den zwei Phasen gleich ist. Ist der Druck unterschiedlich, wird der Differenzdruck durch die Oberflächenspannung aufgebracht, wobei die Grenzfläche die Form einer Minimalfläche annimmt. Der Differenzdruck ist

$$\Delta p = \sigma_{ab} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (119)$$

mit σ_{ab} = Grenzflächenspannung zwischen Phase *a* und *b* und R_1, R_2 = Hauptkrümmungsradien der Grenzfläche (Laplace-Gleichung). Für eine Kugelfläche gilt $\Delta p = 2\sigma_{ab}/R$. Der Überdruck in einer Seifenblase ist also umgekehrt proportional zum Durchmesser; bei zwei zusammenhängenden Seifenblasen wächst die große immer auf Kosten der kleinen.

In einer zylindrischen Kapillarröhre bildet sich ebenfalls eine gekrümmte Minimalfläche zwischen Gas und Flüssigkeit aus (Bild A.54 c)), wobei sich eine Spannung von

$$p_k = \frac{2\sigma \cos\theta}{r} \quad (120)$$

ausbildet. Diese wirkt als Zugspannung auf den Flüssigkeitsfaden und hebt den Flüssigkeitsspiegel (Aszension) um

$$h = \frac{p_k}{g\rho} = \frac{2\sigma \cos\theta}{rg\rho}. \quad (121)$$

Für Wasser ($\theta = 0^\circ$) ergibt sich $h \cdot r \approx 15 \cdot 10^{-6} m^2$. Die erreichbare Steighöhe ist also umgekehrt proportional zum Radius der Kapillare. Bei $\theta = 90^\circ$ ist $h = 0$, für $\theta > 90^\circ$ ergibt sich eine Absenkung (Depression).

Bis der nach Gl. (121) errechnete Zustand erreicht ist, kann es sehr lange dauern. Oder er wird überhaupt nicht erreicht, da der Kontakt mit der Flüssigkeit unterbrochen wird, z. B. bei Schlagregen auf eine Gebäudefassade. Wenn der zeitliche Verlauf des kapillaren Saugens gesucht ist, wird eine Bilanz aller Kräfte erstellt, die auf die Flüssigkeit einwirken. Hierzu gehören der Kapillarzug nach Gl. (120), die Reibungskräfte der zähen Flüssigkeit, die

Massenträgheit und die Schwerkraft. Für eine senkrechte zylindrische Kapillare mit Radius r ergibt sich

$$p_k - \rho g z - \frac{8\eta \dot{z}}{r^2} z - \frac{d(\rho z \dot{z})}{dt} = 0. \quad (122)$$

Ausdifferenziert und geordnet ergibt sich folgende Differentialgleichung:

$$\rho z \ddot{z} + \frac{8\eta}{r^2} z \dot{z} + \rho g z - p_k = 0. \quad (123)$$

Vernachlässigt man die Massenkräfte, die bei kleinen Kapillaren sehr klein sind, geht Gl. (123) über in

$$\dot{z} = \frac{r^2}{8\eta} \frac{p_k - \rho g z}{z} \quad (124)$$

mit der Lösung

$$t = \frac{8\eta h}{\rho g r^2} \left[\ln \frac{h}{h \cdot z} - \frac{z}{h} \right] \quad (125)$$

mit h aus Gl. (121). Für die Bewegung in einer waagerechten Kapillare in x-Richtung ergibt sich

$$t = \frac{4\eta}{r} \frac{1}{p_k} x^2 \quad (126)$$

oder mit Gl. (120)

$$x = \left(\frac{r\sigma}{2\eta} t \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (127)$$

Das kapillare Eindringen einer Flüssigkeit folgt einer \sqrt{t} -Beziehung. Es erfolgt bei größeren Poren schneller als bei kleinen und hängt direkt vom Verhältnis $(\sigma/\eta)^{1/2}$ der Flüssigkeit ab (θ wurde hier zu 0° gesetzt). Gl. (127) gilt bei $r \leq 10 \mu\text{m}$ auch für senkrechte und geneigte Kapillaren bei nicht zu großen Steighöhen.

Bei Baustoffen ist $r \neq \text{const.}$ und häufig nicht bekannt, auch σ ist nicht immer bekannt. Daher werden aus Versuchen der Flüssigkeitseindringkoeffizient B [$\text{m s}^{-1/2}$] aus

$$x = B\sqrt{t} \quad (128)$$

und der Flüssigkeitsaufnahmekoeffizient A [$\text{kg m}^2 \text{s}^{-1/2}$] aus

$$m = A\sqrt{t} \quad (129)$$

bzw. die Sorptivität S [$\text{m}^3 \text{m}^{-2} \text{s}^{-1/2}$] aus

$$V = S\sqrt{t} \quad (130)$$

bestimmt, wobei x = Eindringtiefe nach t = Zeit, m = aufgenommene Masse und V = aufgenommenes Volumen. Mit der wirksamen Porosität ε und der Dichte ρ der Flüssigkeit gelten folgende Zusammenhänge:

$$A = \varepsilon \rho B, \quad A = \rho S, \quad S = \varepsilon B. \quad (131)$$

Wirken Kapillarkraft p_k und äußerer Druck p_a gleichzeitig, so werden die Kräfte addiert, womit für die Eindringtiefe folgt:

$$x = \left[\frac{r^2}{4\eta} (p_k + p_a) t \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (132)$$