

文章编号: 1000-4750(2019)11-0013-14

《结构理论史——探求平衡》概要

李国强^{1,2}, 吉 唱¹

(1. 同济大学土木工程学院, 上海 200092; 2. 同济大学土木工程国家重点实验室, 上海 200092)

摘要: 近几十年来, 力学和结构的发展日新月异, 而结构理论的历史研究也已经引起了大家的广泛关注。作为科学史的一个分支, 结构理论史提供了理解结构发展的一条捷径, 在这一领域的代表性作品《结构理论史——从拱分析到计算力学》于2002年以德文出版。2008年, 这本书的英文版出版, 历经10年时间, 于2018年再次以英文出版, 并更名为《结构理论史——探求平衡》(The History of the Theory of Structures: Searching for Equilibrium)。该书以历史逻辑性(historico-logical)的视角介绍了结构理论的体系架构, 按照时间顺序展示了自古希腊时期以来力学理论和工程实践错综复杂的发展历程, 堪称结构理论发展的百科全书。笔者在拜读此书后撰写本文, 进行简要的介绍, 并重点介绍了结构理论发展史上的重要科学争论。

关键词: 结构理论; 力学; 综述; 平衡; 历史

中图分类号: TU31 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2018.12.0665

INTRODUCTION TO THE HISTORY OF THE THEORY OF STRUCTURES: SEARCHING FOR EQUILIBRIUM

LI Guo-qiang^{1,2}, JI Chang¹

(1. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China;

2. National Key Lab for Disaster Reduction in Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Mechanics and structures have developed rapidly in recent decades. Meanwhile, the research of the history of the theory of structures has been highly concerned. As an interdisciplinary field of scientific history, the history of the theory of structures provides a shortcut to understand the development of structural engineering, the masterpiece of which is a Germany book named The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics published in 2002. The English version of this book was published in 2008, and republished ten years later as the 2nd edition, renamed as The History of the Theory of Structures: Searching for Equilibrium, in 2018. In this book, the development of the theory of structures is introduced from a historic-logical perspective. It demonstrates the complicated relationship of the theory of mechanics and structural engineering spanning from the ancient Greece to modern computer age in a roughly chronological order, which could be called the encyclopedia of the development of the theory of structures. We are honored to have read the book and write this article to make a brief introduction to this book with emphasizing a series of important controversies in the history of the theory of structures.

Key words: the theory of structures; mechanics; review; equilibrium; history

收稿日期: 2018-12-12; 修改日期: 2019-03-25

通讯作者: 李国强(1963—), 男, 湖南人, 教授, 博士, 从事多高层钢结构、钢结构抗震、钢结构抗火、钢结构抗爆等研究(E-mail: gqli@tongji.edu.cn).

作者简介: 吉 唱(1997—), 女, 安徽人, 硕士生, 从事钢结构研究(E-mail: 1832357@tongji.edu.cn).

1 本文缘由

力学和结构理论是土木工程专业的学生需要学习和掌握的主要基础理论。我们自中学时期起就开始学习力学知识，后来在大学期间又学习了理论力学、材料力学、土力学、结构力学等课程，其间，我们了解到历史上诸多鼎鼎有名的人物，有许多重要的公式或原理也自然而然地以他们的名字命名，如拉梅常数、包兴格效应、达朗贝尔原理、太沙基一维固结渗流理论等。然而，我们在学习的过程中，很少去了解它们的来源、背景和发展历程，这不利于我们构建完备的知识体系。从历史的视角来学习结构分析的基本原理，一方面可以让学生明白只要勇于尝试，他们也同样可以参与完成结构理论研究，另一方面又能增加学习的乐趣。可以说，了解本专业及相关学科的发展史，是土木工程学科学习不可或缺的一部分。

2018年6月12日，笔者收到一封来自德国的邮件，信上介绍了一本关于结构理论史的书，言如有兴趣可赠阅此书，而来信人正是此书的作者，尽管在此之前笔者并不曾认识来信人，也不知其如何得知我的邮箱地址。在告知收件地址后不久，笔者便收到了这本名为《结构理论史——探求平衡》^[1]的书。该书以时间为基本线，介绍了结构理论的发展史，深入浅出，内容详实，是一部非常好的科学著作。笔者在品阅之余，认为有必要对该书的主要内容进行编译，推介给我国相关专业人员和学生。

该书作者卡尔·库勒(Karl-Eugen Kurrer)，1952年出生于德国，1973年毕业于斯图加特大学应用科学系，并获得工程学士学位，1977年—1981年任职于柏林工业大学结构理论系，于1986年以优异成绩取得柏林工业大学博士学位。自1996年以来一直担任德国工程师协会主席。曾任第三届国际建筑史大会科学委员会主席。1996年—2018年2月担任德国《钢结构》期刊主编，2008年起任《钢结构设计与研究》期刊主编。2017年10月18日，科特布斯勃兰登堡理工大学授予他荣誉博士学位。库勒先生不仅在工程、机械、材料等领域成果突出，还一直着力于结构理论史研究工作，长达40余年。他发表了180多篇论文和若干专著，本书《结构理论史——探求平衡》便是他的代表作。

2 原著概况

原著第一版于2002年以德文出版，2008年以

英文出版，书名为《结构理论史——从拱分析到计算力学》。2016年作者库勒便开始修订这部著作，历经两年时间，该书于2018年再次出版。相比于第一版，第二版的内容要充实丰富得多，这样的鸿篇巨制也体现了作者扎实的理论功底和丰富的工程经验。而第二版书名《结构理论史——探求平衡》，其副标题则改为“探求平衡”，一方面，这提醒我们力学原理中平衡条件的重要性，没有平衡就没有受力系统。另一方面，也暗示了作为一个科学分支，结构理论的首要任务是寻求科学的研究和实际工程应用的平衡，这样的理念也贯穿全书。

全书共15章，各章标题如下：

1. 结构理论史研究的任务和目标
2. 以史为鉴：12篇介绍性文章
3. 第一批工程科学学科：结构理论和应用力学
4. 从砌体拱到弹性拱
5. 土压力理论发展史
6. 结构理论的开端
7. 结构理论的学科形成时期
8. 从钢铁建造到现代钢结构
9. 杆件分析法推广到三维：空间框架
10. 钢筋混凝土结构对结构理论的影响
11. 结构理论的巩固时期
12. 计算力学的发展与建立
13. 力学和结构理论的13个科学争论
14. 结构理论史展望
15. 结构理论的260个主要人物简介

其中，第一章为概述，第二章到第十二章讲述了结构理论的发展历程，第十三章追溯了整个结构发展史上的经典争论，第十四章对结构发展史进行了总结和展望，第十五章是结构史上的著名人物的短篇传记。

作者在书中将结构理论的发展史划分为四个时期：

准备时期(1575—1825)——这一时期主要采用经验法进行结构设计，同时也为后来的许多结构理论奠定了基础；

学科形成时期(1825—1900)——结构理论逐渐发展形成一门独立的学科，代表人物为纳维(Navier, 1785—1836)；

巩固时期(1900—1950)——这一时期主要进行结构理论的进一步深化拓展，如板壳理论和非线性效应；

整合时期(1950—)——将结构理论应用于结构设计：草图设计—分析—细化设计—建造施工的过程中。

第一章从科学研究、工程应用、教学和文化四个方面说明了结构理论史研究的任务和目的，鼓励读者追随作者的脚步，回顾结构理论发展的历程，思考结构理论与工程应用、结构与建筑之间的关系。

第二章主要是12篇介绍性文章，作者在此明确定义了结构理论发展历经的四个时期，讲述了结构理论从杠杆原理到挡土墙的土压力研究，到极限荷载法、塑性铰法，再到结构原理等的发展，介绍了结构理论由现象到概念再到原理的发展历程。

第三章介绍了结构理论和应用力学的诸多著作，同时从科学的研究和认识论两个方面对这两个学科进行了解读。

第四章主要讲了拱理论。砌体拱和弹性拱结构可以用建模与仿真的方法来进行受力分析。几个世纪以来，建模与仿真的方法几乎存在于所有的科学领域，它与计算机和互联网技术同时出现，是人类思想的执行者，也是创新的驱动力。砌体拱结构一直是古代建筑中的一个未解之谜，它引起了包括达芬奇在内的诸多工程师的兴趣。自16世纪末，罗马建筑师开创了砌体拱建筑的新纪元以来，拱结构由于可以达到更大的高跨比，使得其应用更为广泛。从达芬奇提出的砌体拱楔体理论，到一个世纪后的现代拱理论，拱理论的发展既有赖于前人的成果，也得益于温克勒(Winkler, 1835—1888)和穆勒-布雷斯劳(Müller-Breslau, 1851—1925)等学者的努力。而现代更为先进的有限元分析方法，则可以实现更为复杂的拱类结构计算^[2]。

第五章介绍的土压力理论，可称为第一个真正意义上奠定了现代土木工程学科基础的工程科学理论。本章讲述了土压力理论及其实验研究的发展与完善，突出体现了土压力理论在结构工程领域的重要地位。

第六章从材料强度、连续梁理论等方面介绍了结构理论的开始时期——文艺复兴时期。这一章详细介绍了伽利略(Galileo Galilei, 1564—1642)《关于两门新科学的对话》(Discorsi e Dimostrazioni Matematiche, intorno a due nuove scienze)一书，通过书中三位人物的言谈，分阶段展开了精辟的力学理论论述，其中耳熟能详的有伽利略的木梁弯曲试验(见图1)。这一章讲述了材料力学的发展史和结构理

论从无到有的质变，为后续论述作了良好的铺垫。

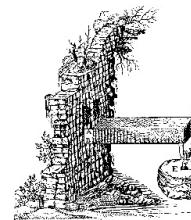


图1 伽利略弯曲试验

Fig.1 Galileo's bending failure problem

而第七章则以圣维南(Saint-Venant, 1797—1886)的讨论开篇，介绍了结构理论的学科形成时期。纳维，作为一个贯彻始终的实践者和应用力学的教授，他是第一个将应用力学和材料力学结合起来，应用到实际结构工程中去的人，也是第一个将结构理论视为独立学科的人。书中提到，扭转理论的发展促进了失稳理论的发展。此外，库勒有意梳理了钢-混凝土组合结构和轻钢结构的发展历程，其中，组合结构具有与钢筋混凝土结构同样悠久的历史。这些理论和应用的发展都极大地促进了钢结构建筑工业的发展^[2]。

第八章、第九章、第十章主要讨论的是特定材料和结构体系下的结构分析方法。事实上，不同的结构理论方法适用于不同的结构体系和材料。当然，结构分析方法可以适用于不同材料和结构，但针对一个具有特定材料的特定结构往往有特定的结构分析方法。此外，第八章、第十章加入了板壳理论的部分，相对于第一版又有了较大补充。

第十一章、第十二章主要讨论了近现代发展的结构分析方法和数值模拟方法。计算机时代的出现，有力地推动了结构分析从经典力学(手算)向计算力学的转变。

第十三章讨论了力学和结构理论史上著名的13个争论，其中，关于修缮圣彼得大教堂的结构报告的争论表明，应用科学方法解决工程问题往往会引起理论和实践之间的无休止的争论。现代工程界一致认为，该报告中的数学分析过程是历史上首个结构计算算例。

第十四章对结构理论史进行了总结和展望，探讨了结构理论在工程中的地位，建筑师和结构工程师之间的关系及建筑美学和结构实用性的平衡等问题，并针对结构设计提出了一种新的方法——计算机辅助图解静力分析法(computer-aided graphic statics, CAGS)。同时，作者也看到，随着科学技术的发展，机械工程、汽车、造船、航空、生物等

各个学科之间的界限在计算力学的大背景下愈渐模糊——所用的概念、方法和工具在不同领域之间也往往有着通用性。

总的来说，这是关于结构理论和结构分析的一本综合性专著，既可通篇概览，也可以独立地选取某一章节精读，不论是对科学技术感兴趣的历史学家，还是对结构工程师和研究生们，《结构理论史——探求平衡》都是一本值得典藏的佳作。

3 结构理论发展史上的重要科学争论

无论是在自然科学、工程科学领域，还是在社会科学和人文学科领域，只要学术存在的地方，总会有百家争鸣，总会有科学争论。科学争论的存在，促进了学科的发展。然而在如今科学大行其道的时代，科学争论往往活跃在社会人文科学界，自然和工程学科却没有想象中那么重视它。一个重要的原因大概是，社会人文学科的发展，依赖于交流和辩论，而自然科学家和工程科学家往往更多地通过试验或者工程实践来进行研究或者验证。这种情形若是称之为“反社会”，恐怕也有一定的道理，但这种对科学争论的忽视，从另一方面更加迫切地证明了其重要性。

科学争论一般而言以下三种形式存在：

- I 关于某学科的基本原理的争论(建立)
- II 关于规律发展的争论(竞争)
- III 优先权争论

从 17 世纪现代力学产生开始，科学争论已经成为力学规律和结构理论发展的重要因素。伽利略(Galileo Galilei, 1564—1642)在他的两部以对话为主的著作中，甚至采用了虚构科学争论的方法来进行讲解。

3.1 伽利略与《关于托勒密和哥白尼两大世界体系的对话》

在伽利略(见图 2)的 1632 年出版的《关于托勒密和哥白尼两大世界体系的对话》(Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo)一书中，伽利略虚构了三个人物，萨尔维亚蒂、萨格雷多和辛普利西奥，来对古代的托勒密体系和现代的哥白尼体系展开讨论。

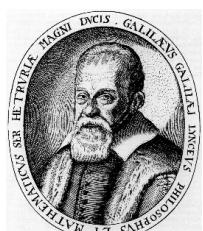


图 2 伽利略·伽利雷

Fig.2 Galileo Galilei

借萨尔维亚蒂这一人物之口(图 3(左))，伽利略向辛普利西奥(图 3(中))——亚里士多德自然哲学体系的追随者，阐述了哥白尼体系的本质。并且，伽利略通过天文学家们观察到的现象(金星的盈亏现象和各行星与地球的相对位置)验证了哥白尼体系的本质。此外，他驳斥了亚里士多德及其追随者提出的运动定律，并将相对匀速运动体系用公式进行表达。



图 3 伽利略《对话》卷首插图

Fig.3 Frontispiece of Galileo's Dialogue

《对话》出版后不久，罗马教廷便勒令停止出售，而伽利略不得不在 1632 年 10 月 1 日受审出庭回应。1633 年 6 月 22 日，伽利略重新检讨了所谓的错误并发誓“今后绝不做出任何言语或书面上的可疑表述”^[3]。然而，在 1638 年，《关于两门新科学的对话》一书出版——显然，伽利略又违背了这一诺言。

3.2 伽利略与《关于两门新科学的对话》

伽利略的(《关于两门新科学的对话》(Discorsi e Dimostrazioni Matematiche, intorno a due nuove scienze)，如图 4)由爱思唯尔(Elsevier)集团出版于荷兰莱顿^[4]，书中萨尔维亚蒂(代表伽利略)、萨格雷多(代表一知半解的门外汉)和辛普利西奥(代表过时的亚里士多德自然哲学)的讨论中，伽利略提出了两门新科学，即非亚里士多德动力学和材料力学。伽利略提出的材料力学的核心是梁理论(见图 1)。1826 年，纳维首次以实用弯曲理论攻克梁理论的难题。

伽利略撰写的《关于托勒密和哥白尼两大世界体系的对话》，用最严密的逻辑有力地支撑了日心说体系，而他的另一本著作《关于两门新科学的对话》则在推翻了亚里士多德自然科学理论的同时，开创了材料力学和动力学两门新的科学。这两种情况都可称为科学争论类型 I，因为关注的是科学学

科——天文学、动力学和材料力学的建立。

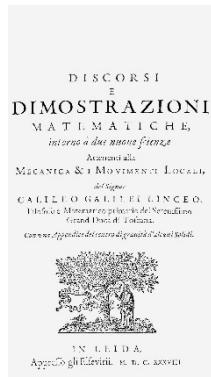


图 4 《对话》扉页

Fig.4 Title page of Dialogue

3.3 关于力的真实量度的哲学争论

在 1644 这年, 勒奈·笛卡尔(Rene Descartes, 1596—1650)将宇宙中的总质量 m 与速度 v 乘积恒为一常数的假定用式(1)进行表达, 即:

$$\sum F = \sum(m \cdot v) = const \quad (1)$$

在 1686 年 3 月, 莱布尼兹(Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646—1716, 见图 5)的文章在《教师学报》上发表, 这篇文章对“对卡提修斯等人就某一自然定律所犯的明显错误并将其错误地应用到力学上”进行了简要阐述, “文中提及的这一定律声称, 上帝总是保持相同不变的运动量”^[3], 这引发了关于力的真实量度的长达半个世纪的争论。



图 5 戈特弗里德·威廉·莱布尼兹

Fig.5 Gottfried Wilhelm Leibniz

围绕力的概念(就保守变量而言, 这里用 F 表示)而展开的争论使得整个科学界分化为两大阵营: 笛卡尔主义者和莱布尼兹主义者。下面是与此有关的名人:

——莱布尼兹(1686):

提出公式化表述: 静力学: $F = m \cdot v = const$;
动力学: $F = m \cdot v^2 = const$

——艾博·德·卡特兰(1686)

——莱布尼兹(1687)

——帕潘(1689)

——莱布尼兹(1690)

——丹尼尔·伯努利(1726):

$$(v^2 / 2) = \int p \cdot dx \longleftrightarrow m \cdot (v^2 / 2) - m \cdot (v^2 / 2)_o = \int F \cdot ds$$

在 1745 年, 达朗贝尔(Jean le Rond d'Alembert, 1717—1783, 见图 6)将这场围绕力的真实量度展开的争论称为“毫无意义的形而上学的讨论……一个不值得哲学家参与的争论”^[3]。

康德(Kant, 1724—1804, 见图 7)没能在他的处女作《论活力的正确评价》(1746)中对关于力的真实量度的争论做出实质性贡献。19 世纪 40 年代以后, 随着能量守恒定律的公式化表述的出现, 系统的能量学基本原理才变得明晰起来^[5]。虽然如此, 关于力的真实量度的争论却在哲学层面上支持了能量守恒定律。由于这一争论是不同学说之间的纷争, 可以将其视为类型 II。



图 6 让·勒朗·达朗贝尔

Fig.6 Jean le Rond
d'Alembert



图 7 伊曼努尔·康德

Fig.7 Immanuel Kant

3.4 关于最小作用量原理的争论

在 1740 年, 腓特烈二世时期, 普鲁士国王邀请科学家莫佩尔蒂(Maupertuis, 1698—1759, 见图 8)和哲学家伏尔泰(Voltaire, 1694—1778)到克莱沃的莫伊兰德城堡做客, 并邀请莫佩尔蒂一同去柏林商讨创立新的研究院的计划。然而直到 1745 年, 第二次西里西亚战争结束, 研究院才创立。在 1746 年之前莫佩尔蒂已经在回忆录里声明了一条同样适用于运动和静止的物体的原则: “对于所有的自然现象, 作用量趋向于最小值”^[3]。莫佩尔蒂的最小作用量原理, 直到 1750 年(此时他仍担任研究院院长一职), 才有学者提出质疑。

约翰·塞缪尔·凯尼格(Johann Samuel König, 1712—1757, 见图 9)并不认同莫佩尔蒂的“最小作用量原理”, 并在一篇论文中, 引用了 1708 年 10 月 16 日莱布尼兹给雅克比·赫曼(Jakob Hermann,

1678—1733)的一封信，对莫佩尔蒂的最小作用量原理提出了质疑。在这封信中，莱布尼兹采用变分的形式更为准确地描述了这个原理。那些自负的牛顿学说支持者们认为这一行为激怒了莫佩尔蒂，因为这件事就表示凯尼格支持莱布尼兹。莫佩尔蒂要求见到信件原稿，但他费尽心思都没能找到。于是，研究院判定这封信是伪造。在 1752 年，借助一篇题为“阿卡基亚博士”的讽刺莫佩尔蒂的匿名文章，凯尼格获得了前所未有的支持，成为了这次对战的胜利者。这篇充满辛辣玩笑和嘲讽的文章的作者不是别人，正是伏尔泰^[6]！



图8 皮埃尔·路易·佩尔蒂

Fig.8 Pierre-Louis Moreau de Maupertuis



图9 约翰·塞缪尔莫·
凯尼格

Fig.9 Johann Samuel König

在 1696 年, 约翰·伯努利(Johann Bernoulli, 1667—1746)在《教师学报》上为一个新问题写信征求意见帮助。这个新问题引起了 18 世纪数学家们和 20 世纪前半个世纪结构工程师们的兴趣。伯努利的这个变分问题表述如下(见图 10)。

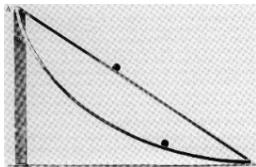


图 10 伯努利的变分问题

Fig.10 Bernoulli's variational problem

设沿垂直平面内有任意两点，一个质点受地心引力的作用，自较高点下滑至较低点，不计摩擦，问质点沿什么曲线下滑，时间最短？质点自较高点运动到较低点所用时间将等于某个特定的积分。而要求出最短时间，就要从可能的曲线运动路径中找到使其路径对应的函数积分取极小值的那条。事实上，质点沿图中所示曲线路径(最速降线)从较高点到较低点耗时最短，这条路径其实就是同时代的惠更斯(Huygens, 1629—1695)曾经研究过的“摆线”(沿直线滚动的圆的边界上一点的轨迹)。

因此，关于最小作用量原理的争论是一个优先权争论(类型III)，同时也是有关学科发展的争论(类型II)。

3.5 理论家与实践者就圣彼得大教堂穹顶的争论

在 1742 年的罗马圣彼得大教堂穹顶的结构分析报告中，三位数学家弗朗西斯科·雅基耶 (Francesco Jacquier, 1713—1788)，博斯科维奇 (Boscovich, 1713—1787) 和托马索·莱苏尔 (Tomaso Le Seur, 1703—1770) 利用一般功定理计算了穹顶的水平推力和抵抗水平推力的环向张力^[8]。他们建议在穹顶上再安装一个张拉环。图 11 展示了穹顶上的裂缝和用一般功定理来计算水平推力的运动模型，这也是结构分析报告的内容。后来，维尔夫雷德·维彭汉斯 (Wilfried Wapenhans, 1952—2006) 等将这份报告的拉丁原文翻译成了德文发表^[9]。以现代结构理论的观点来看，这份报告可谓是“世界上首个结构分析报告”^[9]。当时教廷财务院的画家，皮埃尔·莱昂·盖齐 (Pier Leone Ghezzi, 1674—1755) 曾经赞许道“极为出色的关于圣彼得大教堂穹顶的文章”^[10]。

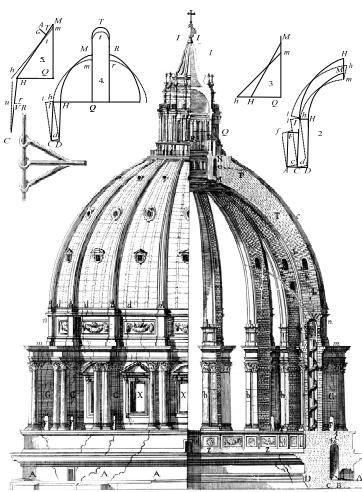


图 11 圣彼得大教堂穹顶^[8]

Fig.11 圣彼得大教堂穹顶

在 1748 年，乔瓦尼·波伦尼(Giovanni Poleni, 1683—1761)就该报告做了如下评论：“如果我们不需借助数学工具来设计和建造圣彼得大教堂的穹顶，那么同样我们可以不依靠数学来重建它……米

开朗琪罗并没有接受数学方面的训练，但他仍能一力主持建造穹顶。”^[11]

波伦尼利用子午线将穹顶等分成 50 小段(类似橙片)，并分别考虑每段的受力平衡。他尝试寻找与穹顶相似的悬链线，并根据悬链线受荷载值与穹顶每段荷载的比例，计算穹顶砌块侧推力的方向和大小。一个受到均匀分布荷载的倒悬链线(即推力线)将与拱的内弧面相交两次(见图 12)。

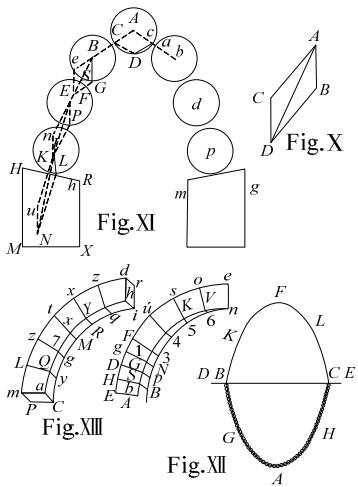


图 12 波伦尼的砌体拱模型

Fig.12 Poleni's masonry arch model

在圣彼得大教堂穹顶结构模型的争论中，由理论直接发展得来的运动模型与波伦尼建立的经验模型分庭抗礼。显然，分析静力学和几何静力学流派的冲突往往非常激烈。因此，砌石拱模型之间的竞争可归类为结构理论学科发展的争论(类型 II 科学争论)。

3.6 非连续体？连续体？

纳维将线弹性刚体视为非连续体。例如，1821 年纳维还从分子模型出发，把每一个分子作为一个力心，并用积分代替求和项，导出弹性固体的平衡和运动方程，这组方程只含有一个弹性常数：弹性模量 E 。他从拉格朗日的虚位移原理出发推导得出的位移微分方程也与之前所得吻合。

1822 年，柯西(Cauchy, 1789—1857)从连续统模型出发，建立了各向同性弹性体的平衡和运动的一般方程，其中包含了两个常数。到了 1828 年，柯西在假定分子假说成立的情况下，将他的理论推广到晶体的情形。同年，泊松批评了纳维用积分代替所有求和项的方法；不过，他也是基于分子假说做出推断的。

乔治·格林(George Green, 1793—1841)于 1839 年建立了基于能量守恒定律的弹性理论^[12]。图 13

阐明了处于连续体力学本构关系、运动学关系和动力学关系核心地位——能量的概念。格林引入了应变能函数^[13]。他假定这个函数可以用应变张量表示，从而可以展开为其一阶、二阶和更高阶的齐次函数之和。其中可能不会有一次项，因为当物体未变形时，势能一定是一个真实的最小值；而由于应变都很小，故只能考虑二次项。最简单的情况是二次齐次函数，单位体积的应变能函数可表示为：

$$\Pi(\varepsilon) = \Pi = \frac{1}{2} \cdot E \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon \quad (2)$$

在非弹性情况下，式(2)为：

$$\Pi(\varepsilon) = \Pi = \frac{1}{2} \cdot f(\varepsilon) \cdot \varepsilon \quad (3)$$

式(3)包含了一个不再服从胡克定律的材料定律，如式(4)：

$$f(\varepsilon) = \sigma(\varepsilon) \neq E \cdot \varepsilon \quad (4)$$

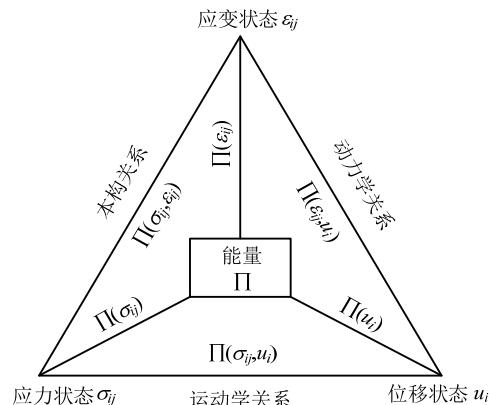


图 13 基于能量的连续体力学四面体构型

Fig.13 The tetrahedron of energy-based continuum mechanics

利用这一原理，格林推导出弹性体方程，其中一般情况下方程还有 21 个常数，最简单情况下方程仅有 2 个常数。罗德·凯尔文(Lord Kelvin, 1824—1907)在 1855 年提出了基于热力学第一定律和第二定律的 $\Pi(\varepsilon_i)$ 的存在性证明。1845 年，斯托克斯(Stokes, 1819—1903)就已经提出了一般弹性体是由 21 个常数确定还是 15 个常数确定的问题。沃尔德马尔·福格特(Woldemar Voigt, 1850—1919)通过 1887 年—1889 年这几年的试验，首次证明了一般弹性体是由 21 个常数确定的。

在一般弹性体常数确定的竞争中，一般弹性理论(类型 I 科学争论)的根基危如累卵。

能量可以表示为应变状态的函数，也可以表示为应力状态的函数(见图 14)。因此，弗里德里希·恩格斯(Friedrich Engesser, 1848—1931)通过引入变形

余能的概念^[14]而暂时结束了关于结构理论的建立的争论：

$$\Pi(\sigma) = \Pi^* = \frac{1}{2} \cdot \varphi(\sigma) \cdot \sigma \quad (5)$$

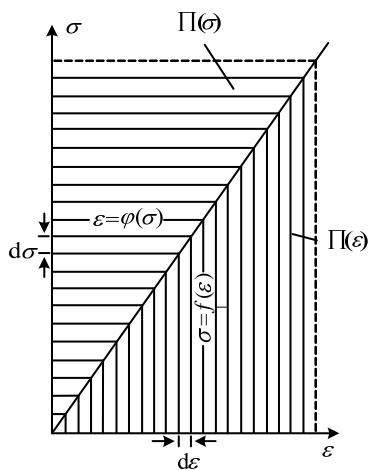


图 14 服从胡克定律的一维单元应力-应变图

Fig.14 Stress-strain diagram for a one-dimensional body that obeys Hooke's law

变形余能(式 5)与变形能(式 2)互余；式(5)包含了一个不再服从胡克定律的材料定律：

$$\varphi(\sigma) = \varepsilon(\sigma) \neq \frac{\sigma}{E} \quad (6)$$

若材料表现为线弹性，式(5)可简化为式(7)：

$$\Pi(\sigma) = \Pi^* = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma}{E} \cdot \sigma \quad (7)$$

$$\Pi(\sigma) = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \sigma^2 \cdot V \quad (8)$$

变形余能(式5)或式(7))对应于应力-应变曲线上方的面积，与变形能(式3)或式(2))互补。它们在材料线弹性(见式(8))的情况下表示如图 14 所示。式(7)给出的基于材料定律的函数关系正是拉梅(Lamé, 1852)版的克拉伯龙(Clapeyron, 1833)定理。

3.7 图解静力学对决图解分析，或称纯理论保卫战

卡尔·库曼(Karl Culmann, 1821—1881)从投影几何学原理出发，在做了体系化的梳理以及扩展后，创立了一门新的学科——“图解静力学”(Graphische Statik)。他支持自己的图解静力学，而反对图解分析法。另一方面，支持图解分析法的核心人物则认为图解静力学的进一步发展并不需要投影几何学。图解分析的早期重要代表人物是约翰·包兴格(Johann Bauschinger, 1834—1893)。

包兴格在他的《图解静力学的元素》(Elemente der Graphischen Statik)一书中写道：“我认为一直以

来图解静力学之所以在工程上应用较少，主要是因为这门新科学缺乏针对性、系统性的教材……因为，图解静力学显然对于工程科学的研究和工程师们非常重要，因而广泛开展图解静力学的应用与实践，势在必行。也许我的书可以促进图解静力学更为广泛的应用，那么所谓的几何学的知识也就不需要了^[15]。”这里所说的几何学，指的正是库曼引以为傲的投影几何学。

库曼反对这种观点。为了捍卫纯粹的图解静力学的理论，他在他的《图解静力学》(Graphische Statik)一书的前言里写道：“现在在数以亿计的大小专著都鲜少涉及静力学的精髓……在普鲁士‘图解静力学’首创性地更名为‘图解分析’，然而除此之外，其他并无建树。(普鲁士的)工程师们缺乏必要的数学素养，如几何学知识。在柏林建筑学院，建筑系甚至没有跟工程系分开^[16]。”

图解静力学和图解分析之间的冲突，阻碍了结构理论(类型 II 科学争论)的发展。

3.8 故意创生两大流派：摩尔派和穆勒-布雷斯劳派

摩尔(Mohr, 1835—1918, 见图 15)和海因里希·穆勒-布雷斯劳(Heinrich Müller-Breslau, 1851—1925, 见图 16)之间的争论在 19 世纪 80 年代愈演愈烈，历经几个过渡时期，最终催生了 20 世纪之后的两大科学流派：从事结构理论研究的柏林学派和从事应用力学研究的德累斯顿学派(见图 17)。

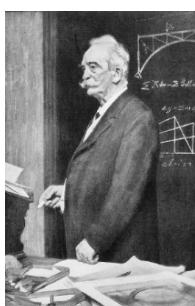


图 15 摩尔



图 16 穆勒-布雷斯劳

Fig.15 Mohr

Fig.16 Müller-Breslau

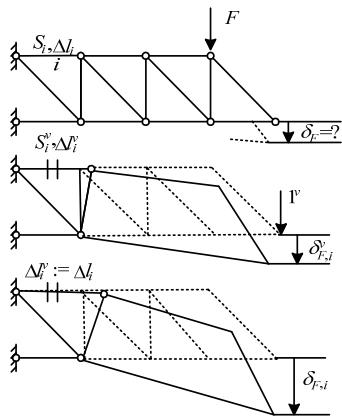
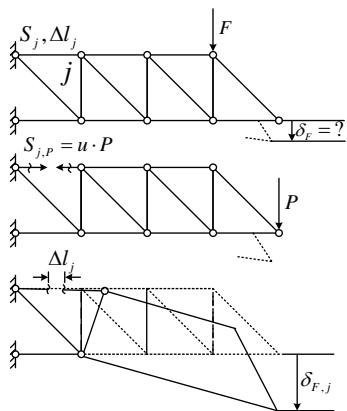
海因里希·穆勒-布雷斯劳强烈支持麦克斯韦(Maxwell, 1831—1879)对一般功定理 $W_a + W_i = 0$ (见图 18)的解释，他将一般功定理与梅纳布雷亚定理(见式(9))、卡氏第二定理(见式(10))放在同等重要的地位。

1864 年，麦克斯韦将桁架视为一种符合能量守恒定律且效率为 1 的机器，其外功 W_a 完全转化为变形能 Π 。与之相反，1874 年，摩尔是在桁架内



图 17 决定科学思维的要素

Fig.17 The elements determining the style of scientific thinking

图 18 麦克斯韦应用虚力原理对线弹性框架情况下的
一般功原理的推导Fig.18 Maxwell's interpretation of the general work theorem
for linear-elastic frameworks in the version of virtual forces图 19 摩尔应用虚力原理对线弹性框架情况下的
一般功原理的推导Fig.19 Mohr's interpretation of the general work theorem for
linear-elastic frameworks in the version of virtual forces

部没有做功的情况下推导出一般功定理的，也就是说，假定 $W_a = 0$ (如图 19)。二者的区别在于，麦克斯韦的推导基于能量守恒定律和有内力虚功的情况，而摩尔则是基于仅存在外力虚功的情况。不过，

这两个模型都利用了虚力原理。

$$\Pi = \min \quad (9)$$

$$\partial \Pi(\dots, F_j, \dots) / \partial F_j = \delta_j \quad (10)$$

摩尔和穆勒·布雷斯劳的争论主要是关于应用力学的功与能量概念的形成、发展与推广^[17-18]，争论是以克拉伯龙定理(见式(11))和结构理论的知识发展体系的形式展开的。

$$W_a = \frac{1}{2} \cdot F \cdot \Delta l \quad (11)$$

摩尔和穆勒·布雷斯劳在结构理论知识体系发展的过程中争相角逐：1864 年麦克斯韦出版了关于线弹性桁架理论的著作；1874 年—1875 年间摩尔依据一般功定理进一步发展了桁架理论；1879 年卡斯蒂利亚诺(Castigliano, 1847—1884)总结归纳了相关的能量定理，简称“卡式定理”；其后穆勒·布雷斯劳将麦克斯韦和摩尔的桁架理论推广应用到线弹性桁架，同时他将卡式定理应用在线弹性桁架上。

1883 年—1889 年，摩尔和穆勒·布雷斯劳之间的科学争论一开始只是发表在期刊上，后来却愈演愈烈，以至在各自的科学著作也有提及。他们的争论迅速蔓延到结构理论的其他领域，如空间框架结构的计算。

在这一阶段，他们没能将结构理论原理全面、明确地分解成虚位移原理、虚功原理、一般功定理和能量定理。

3.9 地位之争

尽管 1883 年—1889 年间的科学争论起初可归为类型 I (建立) 和类型 II (竞争)，但在 20 世纪前 20 年结构理论学科最终成型之时，它转变成了一个优先权争论(类型 III 科学争论)，一方以梅尔滕斯、温加滕为代表，另一方以赫特维希、福贝耳和魏劳赫为代表。这一科学争论的特别之处在于上述人物要么支持摩尔，要么是穆勒·布雷斯劳的拥护者。

乔治·克里斯托夫·梅尔滕斯(George Christopher Mertens, 1843—1917, 见图 20)，作为德国杰出的桥梁结构专家和摩尔忠诚的支持者，他在其三部主要著作《关于结构理论和材料强度的演讲》(Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen und Festigkeitslehre)^[19-21]中给出了结构理论历史的概要，并用公式完整地表达了摩尔的优先权声明。这些声明概括了结构理论的发展：影响线、一般功定理、虚功原理、桁架运动学理论等。而且，同摩尔一样，他将卡式定理从经典结构理论中划分出去。



图 20 梅尔滕斯
Fig.20 Mertens

奥古斯特·赫特维希(August Hertwig, 1872—1955, 见图 21), 因穆勒-布雷斯劳举荐而任职亚琛工业大学教授, 四年后发表了一篇论文, 主要总结了结构理论的一些原理的发展历程和由梅尔滕斯发表的关于结构理论和材料强度的演讲^[22], 并讨论了关于桁架运动学理论、影响线、杆件替代法的优先权问题及麦克斯韦、摩尔、卡斯蒂利亚诺在静定结构理论上的不同之处, 批评了梅尔滕斯对于弹性拱理论和次应力理论的描述。

奥古斯特·福贝耳(August Föppl, 1854—1924, 见图 22), 包兴格的追随者。1897 年, 他在编著的《应用力学讲义》(Vorlesungen über Technische Mechanik)的材料强度(Festigkeitslehre)一章中, 利用一次超静定结构计算的算例, 讨论了卡式定理^[23]。

尤里乌斯·温加滕(Julius Weingarten, 1836—1910, 见图 23), 柏林建筑学院(1879 年更名为柏林工业大学)的力学系教授。他曾经发表一篇证明卡式定理中隐含弹性理论原理的评论性文章, 文中对福贝耳进行了毫不客气的批评; 温加滕不仅与福贝耳在这方面有争执, 与赫特维希、魏劳赫也是如此。

约翰·雅可比·魏劳赫(Johann Jakob Weyrauch, 1845—1917, 见图 24), 斯图加特大学教授, 卡式定理的热效应理论支持者, 并多次就此与温加滕展开争论。

就其内容而言, 柏林学派可以归于几何静力学派, 而德累斯顿学派则属于分析静力学派。

3.10 至死方休: 菲伦格对决太沙基

在土力学这一新兴学科中, 卡尔·冯·太沙基(见图 25)与保罗·菲伦格(见图 26)之间关于可变形多孔土固结的科学争论影响深远, 同时也给菲伦格夫妻带来了沉重的打击。



图 21 赫特维希
Fig.21 Hertwig



图 22 福贝耳
Fig.22 Föppl



图 23 温加滕
Fig.23 Weingarten



图 24 魏劳赫
Fig.24 Weyrauch



图 25 卡尔·冯·太沙基
Fig.25 Karl von Terzaghi



图 26 保罗·菲伦格
Fig.26 Paul Fillunger

作为土力学的创始人, 卡尔·冯·太沙基(Karl von Terzaghi, 1883—1963)^[24]独辟蹊径, 大学毕业后先后在各国各地施工企业工作, 33 岁便已担任教授。1925 年, 他出版了《建立在土的物理学基础的土力学》(Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer Grundlage)^[25]一书。1936 年春, 他与弗洛里克(Fröhlich, 1885—1964)共同出版了《黏土地层沉降理论》(Theorie der Setzung von Tonschichten)^[26]。

保罗·菲伦格(Paul Fillunger, 1883—1937), 1923 年在维也纳高等工业学院任应用力学教授一职。1936 年 12 月, 他发表了颇具争议性的论著《土力学?》(Erdbaumechanik?)^[27]。该书发表后不久, 他与妻子双双自杀身亡。

后来颇负盛名的关于孔隙水压力 w 的太沙基偏微分方程如式(12)所示:

$$\frac{\partial w(z,t)}{\partial t} = \left(\frac{k}{a} \right) \cdot \frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2} \quad (12)$$

式中: k 为渗透系数; a 为压缩系数; z 为土层深度; t 为时间。

这一方程是在进行了完全的含液体基质的固体的观察及特别引进耦合机制的情况下推导建立的。该推导基于傅里叶的热传导方程，但最终公式里难以体现这一点。

菲伦格在他的颇具争议的著作《土力学？》里强烈地批评了太沙基和弗洛里克的固结理论，并在解决固结问题的时候严格假定了一个两相体系。菲伦格的方法与现代纯粹力学中荷载作用下的多孔介质理论技术有异曲同工之处。尽管格哈德·海因里希(Gerhard Heinrich, 1901—1965)等发展了维也纳教授菲伦格的理论，但这位维也纳教授的工作却为世人遗忘，这也导致了后来美国又重复了这一工作！菲伦格对太沙基和弗洛里克的人身攻击加速了土力学的发展进程。菲伦格的正确性得到了一个科学委员会的验证，并且他们认为式(12)是菲伦格理论的一个特例。该委员会发表声明：菲伦格在查证其对手所谓的数学错误的同时自己也犯了一个错误。不过，太沙基和弗洛里克并没能推翻菲伦格的理论。

太沙基、弗洛里克两人与菲伦格之间的冲突有效促进了土力学这一学科的发展(类型 II 科学争论)。

3.11 “原则上说，是的……”：关于原则的争论

摩尔与穆勒-布雷斯劳及其追随者之间关于结构理论原理的争论成为了 1936 年—1938 年间科学争论的主题，也就是结构理论的草创阶段(1925 年—1950 年)。实际上，这也涉及到虚位移原理和弹性理论的变分原理。这一争论最早在 1936 年由柏施尔(Pöschl, 1917—2011)在《建筑师》期刊上关于弹性理论的极小值原理的文章中提出^[28]。在这篇文章中，柏施尔得出结论，虚位移原理的应用会“因为所关注的是弹性平衡还是失稳”而导致截然不同的结果^[29]。杜马克(Domke, 1874—1945)在回信中证明了这一结论是站不住脚的^[30]，并引用了他 1915 年发表的一篇文章^[31]。在这篇文章中，他澄清了关于结构理论原理的地位之争。1938 年，马格雷(Marguerre, 1906—1979)从另一角度出发，在

《应用力学与数学》期刊上发表文章，也同样证明了柏施尔的结论是不能成立的^[32]。1937 年，卡米勒(Kammüller)就在《钢铁与混凝土》期刊上发表了关于虚位移原理的基本报告，这使得亚诺·施莱斯纳(Arno Schleusner, 1882—1951，见图 27)出声回应^[33]。施莱斯纳的反驳反过来又催生了卡米勒的回应^[34]，然后是施莱斯纳对卡米勒的回应^[35]，最终是，

卡米勒对施莱斯纳回应所做的回应^[36]！这一争论中，施莱斯纳在德文中首次使用“虚力原理”^[37]一词。最后，该争论由《钢铁与混凝土》期刊编辑结束。于是，施莱斯纳安排自己的兼职助理克劳斯·兹维林(Klaus Zweiling, 1900—1968，见图 28)撰写了《虚位移原理和弹性理论变分原理》(Das Prinzip der virtuellen Verrückungen und die Variationsprinzipien der Elastizitätstheorie)的手稿。由于当局限制兹维林的出版自由，1938 年，在作者的同意下，该手稿由施莱斯纳在《钢结构施工》期刊上以自己的名字署名发表^[38]。



图 27 亚诺·施莱斯纳
Fig.27 Arno Schleusner



图 28 克劳斯·兹维林
Fig.28 Klaus Zweiling

在这里，虚位移原理、虚力原理和一般功定理之间有了明显的界限。文中同样表明，虚位移原理代表弹性理论的最普遍原理(见图 29)。正因如此，兹维林和施莱斯纳在用变分学语言构建结构理论的工作中作出了重要贡献。

兹维林在 1953 年出版的《平衡与稳定性》(Gleichgewicht und Stabilität)^[39]一书中，汇总了那些在第三帝国时期，由于当局限制其出版自由而以他的好朋友施莱斯纳的名义出版的著作。1950 年，马格雷就小位移下虚位移原理和虚力原理的二元性发表了一份条理清晰的报告^[40]，而之后又发现在大位移下虚位移原理包含了虚力原理(见图 29)。马格雷之所以能够意识到这一点，是因为他在 1938 年就已经建立了大变形情况下的扁壳基本方程，从而动摇了结构线弹性理论的主导地位^[41]。

从一开始，关于虚位移原理的争论就是一个关于结构理论学科发展的争论(类型 II 科学争论)。

3.12 弹性或是塑性？这是个问题。

施图西和瑟利曼在 1961 年或 1962 年被卷入极限荷载法的争论。瑟利曼发表了一篇应用运动学来分析塑性铰法的文章，该方法基于虚位移原理，是用来计算极限荷载的。

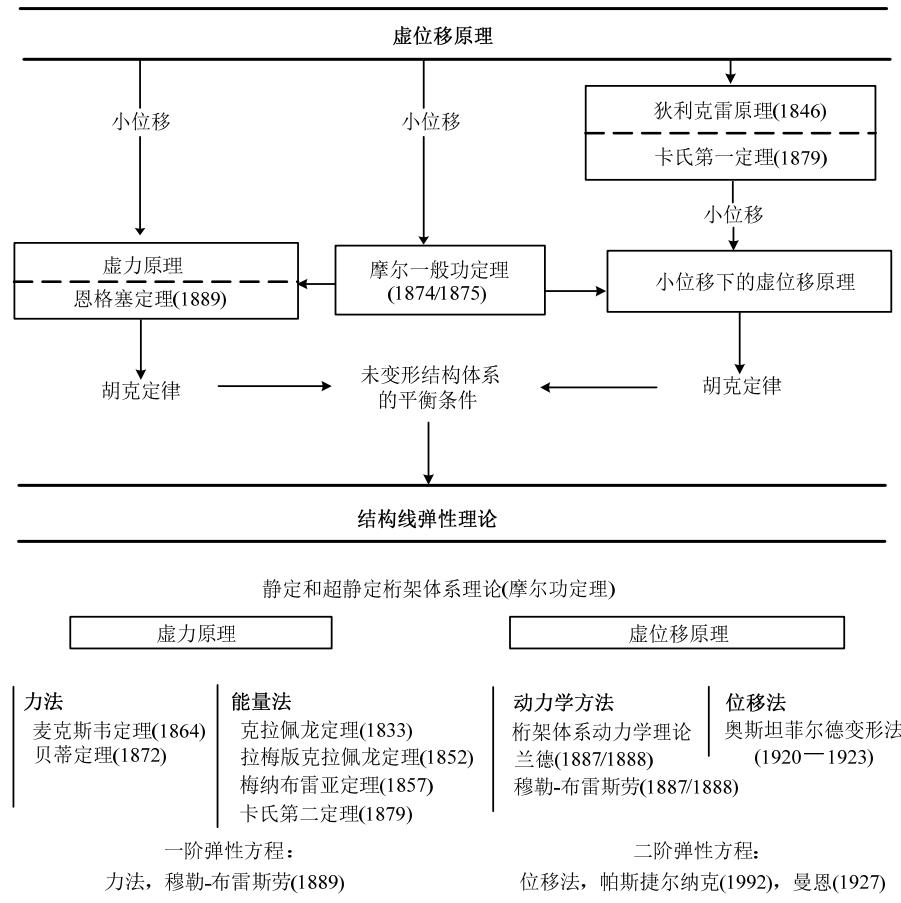


图 29 结构线性理论的二象性

Fig. 29 The dual nature of linear theory of structures

弗里兹·施图西(Fritz Stüssi, 1901—1981, 见图 30), 1930 年毕业于苏黎世联邦理工学院, 1935 年在苏黎世联邦理工学院完成资格论文, 并在文中明确表示反对极限荷载法, 且此后多次对其提出质疑。

布鲁诺·瑟利曼(Bruno Thürlimann, 1923—2008, 见图 31), 1946 年毕业于苏黎世理工学院土木工程专业, 后在苏黎世理工学院担任教授, 主要从事钢结构工程中的极限荷载法、钢筋混凝土壳体和预应力混凝土研究等相关工作。

1935 年, 施图西和科伦布纳(Kollbrunner, 1907—1983)进行了二次超静定连续梁的分析, 发现了极限荷载理论的矛盾性。1962 年前后, 西蒙兹(Symonds)和尼尔(Neal)对极限荷载理论的矛盾性进行了解释。然而, 施图西在 1962 年抨击了极限荷载理论。结果导致了其与瑟利曼之间的科学争论。

施图西和瑟利曼之间的科学争论可以归结为类型 I 或者类型 II。打破线弹性理论在结构理论中主导地位具有更为深远的意义——其目的是用塑性理论, 也就是从材料本构定律(类型 I)观点出发

的结构理论原理, 来代替弹性理论。同时, 施图西和瑟利曼之间的争论也是关于两类结构分析方法的争论, 因而也属于结构理论学科发展的争论(类型 II)。

3.13 经典土压力理论的重要性

19 世纪库仑土压力理论(1773 年—1776 年)的出现和进一步的发展, 促进了经典土压力理论的建立。于是, 土压力理论进而成为土木工程领域特别是结构理论领域里的基本理论。1950 年以后, 库仑法——将探究作用在挡土墙上的土体平衡问题转化为寻找最大下界(主动土压力)和最小上界(被动土压力)——这一方法也在其他结构理论领域以极限荷载法的形式重新出现, 并由赫曼推广到砌体拱领域。

自结构理论的学科形成阶段(1825 年—1900 年)起, 关于土压力理论的争论总是不止不休。特别的, 在结构理论建立的最后阶段(1850 年—1875 年), 摩尔在与温克勒的争论中组织了反对经典土压力理论的运动, 而在结构理论成熟的最初时期(1900

年—1925 年), 他则与穆勒-布雷斯劳产生了类似的矛盾。在结构理论成熟的最后阶段, 太沙基在 1920 年用经典土压力理论反败为胜, 并尝试纳入挡土墙的变形和土体的本构模型。在结构理论的发明阶段(1925 年—1950 年)末期, 施勒特(Schroeter)拟在他的《广义土压力理论》(Erweiterte Erdschub Theorie)一文中完善库仑的土压力理论, 然而以失败告终。同样地, 在结构理论的整合时期(1950 年—), 尽管自 20 世纪 70 年代起土力学的本构模型研究取得了重大进步, 但是经典土压力理论在实际结构理论中作为参考理论依然大行其道。所以经典土压力理论在今天的土压力理论中依然举足轻重。

在关于经典土压力理论的科学争论中, 首当其

表 1 力学和结构理论发展的 13 个争论概览

Table 1 Overview of the 13 scientific controversies in mechanics and theory of structure

争论的本质	原理 类型 I	争论的类型	
		竞争 类型 II	优先权 类型 III
伽利略(1632 年)	天文学		
伽利略(1638 年)	材料强度 运动学		
力的真实量度(1686 年—1749 年)		对动力学守恒定律的探索	
最小作用量原理(1696 年—1744 年)			力学变分问题
圣彼得大教堂(1743 年—1748 年)		砌体拱理论的竞争	
弹性理论(1821 年—1889 年)	连续体假说的建立		
图解静力学 vs 图解分析(1871 年—1875 年)		图解法的数学基础	
结构经典理论(1883 年—1886 年)	桁架线弹性理论		
追随者之间的争论(1900 年—1910 年)			结构经典理论回顾
土力学(1936 年—1937 年)		固结理论	
虚位移原理的争论(1936 年—1938 年)		结构理论原理的变分问题	
关于极限荷载法的争论(1935 年—1962 年)	结构塑性分析理论的建立		
经典土压力理论(1773 年—)	结构分析的理论模型		

4 结论

《结构理论史——探求平衡》一书, 内容横跨几个世纪, 从古希腊的力学基本概念, 到现代基于有限元方法的计算力学, 展现了结构理论发展的历史全貌。该书的扉页引用了海涅(Heinrich Heine, 1797—1856)的名言——“今日之事乃昨日之果。我们只有探索前因才能知晓后果”。了解结构理论的发展历史, 反思发展的曲折历程, 学习前人的研究思路、方法和成果, 对今天我们学习和发展结构理论将有重要借鉴意义。

当今世界科技迅猛发展, 但结构理论仍是工程科技发展的重要基石。尽管新中国成立以来, 与结构理论相关的力学和结构工程系科起步较晚, 但也

位的是极限平衡条件背后的原理, 也就是结构理论原理(类型 I 科学争论)。其次, 这些争论是在两大结构理论的竞争的基础上进行的(类型 II 科学争论)。如表 1 所示是力学和结构理论发展史上的 13 个科学争论, 其中 3 个属于类型 I(建立), 5 个属于类型 II(竞争), 3 个属于类型 I 或者类型 II, 1 个既属于类型 II 又属于 III(混合型), 还有一个属于类型 III(优先权)。而且, 可以发现的是, 力学和结构理论发展史科学争论的类型 I、II、III 依照一定的历史逻辑性依次出现: I, I/II, II, II/III 和 III。因此, 力学和结构理论发展史也可以理解为这些争论的历史。

为结构理论的发展做出了贡献, 在该书中提到的对结构理论发展有历史性贡献的重要人物中, 也列举了钱学森、钱令希、李国豪、胡海昌等国人的重要贡献。我等后辈要锐意进取, 勇攀高峰, 为结构理论的进一步发展做出应有的贡献。

参考文献:

- [1] Kurrer K-E. The history of the theory of structures: Searching for equilibrium [J]. Stahlbau, 2018, 87(10): 1025—1026.
- [2] Kunzath S K. Review of the history of the theory of structures—from arch analysis to computational mechanics by Karl-Eugen Kurrer [J]. Journal of Structural Engineering, 2009, 135(3): 330—331.
- [3] Szabo I. Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen [M]. 3rd ed. Basel: Birkhäuser, 1996: 549, 62, 72, 93.

- [4] Galilei G. *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno a due nuove scienze* [M]. Leyden: Elsevier, 1638.
- [5] Bögle A K K-. Jörg Schlaich und die Schule des Konstruktiven Ingenieurbaus [M]. Berlin: Ernst & Sohn, 2014: 160—171.
- [6] Voltaire F M A, Diesch C. *Der Doktor Akakia und sein Schildknappe* [M]. Berlin: Berliner Bibliophilenbund, 1927.
- [7] Euler L. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sensu accepti* [M]. Lausanne & Geneva: Marcum-Michaelm Bousquet, 1744.
- [8] Le Seur T, Jacquier F, Boscovich R G. *Parere di Tre Matematici Sopra i danni, che si sono trovati nella cupola di San Pietro sul fine dell'anno MDCCXLII, Dato per ordine di Nostro Signore Papa Benedetto XIV* [M]. Roma: Erscheinungsort Nicht Ermittelbar & Verlag Nicht Ermittelbar, 1742.
- [9] Wapenhans W, Richter J. *Die erste Statik der Welt von 1742 zur Peterskuppel in Rom* [M]. Dresden: Wapenhans und Richter, 2001.
- [10] Straub H, Halász R v. *Drei bisher unveröffentlichte Karikaturen zur Frühgeschichte der Baustatik* [J]. *Die Bautechnik*, 1960, 37(10): 365.
- [11] Straub H. *Die Geschichte der Bauingenieurkunst* [M]. 4th ed. Basel: Birkhäuser, 1992: 159.
- [12] Green G. *On the laws of reflection and refraction of light at the common surface of two non-crystallized media* [J]. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*. 1839, 7: 1—120.
- [13] Charlton T M. *A history of theory of structures in the nineteenth century* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1982.
- [14] Engesser F E. *Über statisch umbestimmte Träger bei beliebigen Formänderungs-Gesetz und über der Satz von der kleinsten Ergänzungswärk* [J]. *Zeitschrift d. Arch.- & Ing.-Vereins zu Hannover*, 1889, 35: 733—744.
- [15] Bauschinger J. *Elemente der graphischen Statik* [M]. Berlin: Polytechnische Buchhandlung Seydel, 1880.
- [16] Culmann C. *Die graphische static* [M]. Leipzig: Baumgärtner's Buchhandlung, 1875.
- [17] Clapeyron E. *Note sur un théorème de mécanique* [J]. *Annales des Mines*, 1833, III: 63—70.
- [18] Lamé G. *Leçons sur la théorie mathématique* [M]. Paris: Bachelier, 1852.
- [19] Mehrtens G C. *Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen und Festigkeitslehre. Erster Band: Einführung in die Grundlagen*. [M]. Leipzig: Wilhelm Engelmann, 1903.
- [20] Mehrtens G C. *Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen und Festigkeitslehre. Zweiter Band: Statisch bestimmte Systeme* [M]. Leipzig: Wilhelm Engelmann, 1904.
- [21] Mehrtens G C. *Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen und Festigkeitslehre. Dritter Band: Formänderungen und statisch unbestimmte Träger* [M]. Leipzig: Wilhelm Engelmann, 1905.
- [22] Hertwig A. *Die Entwicklung einiger Prinzipien in der Statik der Baukonstruktionen und die Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen und Festigkeitslehre von GC Mehrtens* [J]. *Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen*, 1906, 52: 493—515.
- [23] Föppl A. *Vorlesungen über Technische Mechanik, Dritter Band: Festigkeitslehre* [M]. Leipzig: B. G. Teubner, 1897.
- [24] Llorente G G, Buj F R. *Contribución al conocimiento de los primeros geotécnicos del siglo XX* [D]. Madrid: Universidad Politécnica de Madrid, 2015.
- [25] von Terzaghi K. *Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer Grundlage* [M]. Leipzig & Vienna: Franz Deuticke, 1925: 399.
- [26] Terzaghi K, Fröhlich O K. *Theorie der Setzung von Tonschichten: eine Einführung in die analytische Tonmechanik* [M]. Leipzig & Vienna: Franz Deuticke, 1936.
- [27] Fillunger P. *Erdbaumechanik?* [M]. Vienna: self-published, 1936.
- [28] Pöschl T. *Über die Minimalprinzipie der Elastizitätstheorie* [J]. *Der Bauingenieur*, 1936, 17(17/18): 160ff.
- [29] Schleusner A. *Das Prinzip der virtuellen Verrückungen und die Variationsprinzipien der Elastizitätstheorie* [J]. *Der Stahlbau*, 1938, 11(24): 185—192.
- [30] Domke O. *Zum Aufsatz “über die Minimalprinzipie der Elastizitätstheorie” von T. Pschl* [J]. *Der Bauingenieur*, 1936, 17(41/42): 459ff.
- [31] Domke O. *Über Variationsprinzipien in der Elastizitätslehre nebst Anwendungen auf die technische Statik* [J]. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 1915, 63: 174—192.
- [32] Marguerre K. *Über die Behandlung von Stabilitätsproblemen mit Hilfe der energetischen Methode* [J]. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1938, 18(1): 57—73.
- [33] Schleusner A. *Zum Prinzip der virtuellen Verschiebungen* [J]. *Beton und Eisen*, 1938, 37(15): 252—254.
- [34] Kammüller K. *Entgegnung zu Schleusner* [J]. *Beton und Eisen*, 1938, 37(16): 271.
- [35] Schleusner A. *Erwiderung zu Kammüller* [J]. *Beton und Eisen*, 1938, 37(16): 271.
- [36] Kammüller K. *Entgegnung zu Schleusner* [J]. *Beton und Eisen*, 1938, 37(16): 271—272.
- [37] Schleusner A. *Zum Prinzip der virtuellen Verschiebungen* [J]. *Beton und Eisen*, 1938, 37(15): 253.
- [38] Schleusner A. *Das Prinzip der virtuellen Verrückungen und die Variationsprinzipien der Elastizitätstheorie* [J]. *Der Stahlbau*, 1938, 11(24): 185—192.
- [39] Zweiling K. *Gleichgewicht und stabilität* [M]. Berlin: Verlag Technik, 1953.
- [40] Marguerre K. *Neure Festigkeitsprobleme des Ingenieurs* [M]. Springer Verlag, 1950.
- [41] Marguerre K. *Zur Theorie der gekrümmten Platte großer Formänderung* [C]. Cambridge: Proc. of 5th Intl. Congress for Applied Mechanics, 1938: 93—101.
- [42] 龙驭球, 崔京浩, 袁驷, 等. *力学筑梦中国*[J]. *工程力学*, 2018, 35(1): 1—54.
Long Yuqiu, Cui Jinghao, Yuan Si, et al. Build ‘Chinese Dream’ with the assistance of mechanics [J]. *Engineering Mechanics*, 2018, 35(1): 1—54. (in Chinese)